

No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas  
e Imaginación (I)

E. Kasner  
J. Newman

48



# Matemáticas e Imaginación (I)

Edward Kasner  
James Newman

Biblioteca  
Científica  
Salvat







# Matemáticas e Imaginación (I)

Biblioteca  
Científica  
Salvat



EXLIBRIS Scan Digit



The Doctor

*Libros, Revistas, Intereses:*  
<http://thedoctorwho1967.blogspot.com.ar/>

# Matemáticas e Imaginación (I)

Edward Kasner  
James Newman

SALVAT



Versión española de la obra original norteamericana *Mathematic and Imagination*, de Edward Kasner y James Newman

Revisión: Luis Bou  
 Diseño de cubierta: Ferran Cartes / Montse Plass

ÍNDICE

TOMO I

I. NOMBRES NUEVOS PARA CONCEPTOS VIEJOS . . .	1
II. MÁS ALLÁ DE LOS GÚGOLES . . . . .	27
III. PIE ( $\pi$ , $i$ , $e$ ): TRASCENDENTES E IMAGINARIOS .	67
IV. OTRAS GEOMETRÍAS: EL PLANO Y LA FANTASÍA	117
V. PASATIEMPOS DE ÉPOCAS PASADAS Y RECIENTES . . . . .	161

TOMO II

VI. PARADOJAS PERDIDAS Y PARADOJAS RECUPERADAS . . . . .	199
VII. AZAR Y PROBABILIDAD . . . . .	231
VIII. GEOMETRÍA DE LA LÁMINA ELÁSTICA . . . . .	277
IX. CAMBIO Y MUTABILIDAD: EL CÁLCULO. . . . .	315

EPÍLOGO. LA MATEMÁTICA Y LA IMAGINACIÓN . . . . .	377
--	-----

© 1994 Salvat Editores, S.A., Barcelona  
 © Ruth C. Newman  
 ISBN: 84-345-8880-3 (Obra completa)  
 ISBN: 84-345-8928-1 (Volumen 48)  
 Depósito Legal: B-20175-1994  
 Publicada por Salvat Editores, S.A., Barcelona  
 Impresa por Printer, i.g.s.a., Junio 1994  
 Printed in Spain



*A R. G., sin cuya desinteresada ayuda  
y comprensión no hubiera habido libro*



## AGRADECIMIENTOS

Estamos agradecidos a muchos libros, que por ser muy numerosos nos vemos imposibilitados de mencionar.

Deseamos expresar particularmente nuestro agradecimiento a Mr. Don Mittleman, de la Columbia University, cuya ayuda en la preparación del original ha sido generosa e inapreciable.

## INTRODUCCIÓN

La moda en materia de libros, en las últimas décadas, ha tendido de forma creciente a la ciencia popular. Hasta los periódicos, en sus suplementos dominicales, y las revistas han dado cabida, en sus columnas, a temas relacionados con la relatividad, la física atómica y las más recientes maravillas de la astronomía y de la química. Aunque esto es síntoma del creciente deseo de saber tanto lo que ocurre en los laboratorios y observatorios, como en los cónclaves de hombres de ciencia y de matemáticos, quienes inspiran cierto temor reverente, una gran parte de la ciencia moderna permanece oculta por un velo de misterio aparentemente impenetrable. Predomina la sensación de que la ciencia, al igual que la magia y la alquimia en la Edad Media, es practicada y sólo puede ser comprendida por un reducido y esotérico grupo de personas. El matemático es considerado todavía como el ermitaño que sabe poco de las formas de vida fuera de su celda y que invierte su tiempo creando teorías incomprensibles e increíbles en una jerga extraña, árida e ininteligible.

Sin embargo, las personas inteligentes, hastiadas del ritmo nervioso de su propia existencia —el agudo impacto de los acontecimientos del día— están ávidas de saber algo de los conocimientos adquiridos por vidas más contemplativas y so-



segadas, reguladas por un reloj más lento y más acompasado que el suyo propio.

La Ciencia, particularmente la Matemática, aunque parezca menos práctica y menos real que las noticias contenidas en los últimos despachos de los boletines de televisión y radio, parece estar construyendo el único edificio permanente y estable en una época en que todos los demás se desmoronan o vuelan hechos pedazos. Esto no quiere decir que la Ciencia no haya experimentado también cambios revolucionarios. Pero ello ha tenido lugar tranquila y honorablemente. Lo que ha dejado de ser útil, se ha descartado sólo después de una madura reflexión y el edificio ha sido erigido con constancia sobre las realizaciones creadoras del pasado.

Así, en cierto modo, la popularización de la ciencia es un deber que se debe cumplir, el deber de infundir valor y de proporcionar satisfacciones a todos los hombres y mujeres de buena voluntad que en todas las partes del mundo están perdiendo paulatinamente su fe en la vida de la razón. En la mayoría de las ciencias se ha descorrido gradualmente el velo de misterio, pero las matemáticas, en gran parte, permanecen aún sin divulgar.

Lo que los libros más populares sobre matemáticas han tratado de hacer es: o discutirlos filosóficamente o aclarar las ideas aprendidas alguna vez y ya olvidadas.

Sobre este particular el propósito que nos ha guiado al escribir este libro ha sido algo diferente. Los franceses aplican el término "haute vulgarisation" al feliz resultado que ni desagrada por su condescendencia ni confunde en una masa de verbosidad técnica.

Nuestra finalidad ha consistido en extender el proceso de "haute vulgarisation" de aquellas avanzadas de las matemáticas que se mencionan, si se lo hace, sólo con un murmullo y a las que se alude sólo por su nombre, para demostrar, por su misma variedad, algo del carácter de las matemáticas, de

su espíritu osado y libre de trabas y de cómo, en su doble aspecto de arte y ciencia, han continuado guiando a las facultades creadoras más allá aún de la imaginación y de la intuición. En la medida que permite un volumen tan reducido sólo puede haber instantáneas y no retratos.

No obstante, esperamos que aun en este calidoscopio pueda haber un estímulo para despertar un interés más amplio y un mayor reconocimiento hacia la reina más arrogante del mundo intelectual.



## I. NOMBRES NUEVOS PARA CONCEPTOS VIEJOS

*«No iré tan lejos como para afirmar que construir una historia del pensamiento humano sin un profundo estudio de las ideas matemáticas de las sucesivas épocas es como omitir a Hamlet en el drama que recibe su nombre. Eso sería pretender demasiado. Pero es, por cierto, análogo a excluir el papel de Ofelia. Este símil es singularmente exacto, pues Ofelia es esencial al drama, es muy encantadora —y un poco loca. Admitamos, pues, que el estudio de las matemáticas es una locura divina del espíritu humano, un refugio ante la urgencia agujoneante de los sucesos contingentes.»*

ALFRED NORTH WHITEHEAD  
*Science and the Modern World*

*Así como de los viejos campos ve el hombre, año tras año, venir el nuevo trigo, del mismo modo, de los viejos libros, viene toda esta nueva ciencia para que el hombre aprenda.*

CHAUCER

De cuando en cuando se hace en matemáticas limpieza general. Se desechan algunos conceptos viejos; otros son sacudidos, desempolvados y reparados; finalmente, se asigna lugar y nombre a las teorías nuevas, que son, por así decirlo, nuevas aportaciones al menaje hogareño. Así pues, lo que nuestro título en realidad significa es *palabras* nuevas de las matemáticas; no nuevos nombres, sino palabras nuevas, términos nuevos que vienen, en parte, a designar nociones nuevas, y en parte, a revigorar conceptos ya conocidos de las matemáticas de tiempos más o menos recientes. Lo mismo que en otras ciencias, seguramente tengan ya las matemáticas demasiadas palabras; tantas, en realidad, que hablar mucho y no decir nada resulta más fácil de lo que debiera. El que la mitad de la población del mundo pueda ser inducida a creer absurdos y santificar burdos errores se debe, sobre todo, a la posibilidad de ensartar palabras, lo mismo que se enhebran las cuentas de un collar. El gran lexicógrafo



Frank Vizetelly estimaba que hay en uso en el idioma inglés unas 800.000 palabras. Pero los matemáticos, aunque de ordinario bastante sobrios en sus expresiones, no están satisfechos con estos 800.000 vocablos. Démosles, pues, unos cuantos más.

Mientras avanzamos por el camino de la ciencia podemos irnos pasando sin nombres nuevos, hasta que nos hacemos con nuevas ideas y creamos conceptos nuevos.

Una de las peculiaridades del lenguaje matemático es que no se vale de tantos nombres largos y difíciles de pronunciar como otras ciencias. Es además un lenguaje conservador, que se apega con firmeza a los vocablos viejos. Los términos empleados por Euclides en sus *Elementos* siguen siendo corrientes hoy en geometría. Pero a uno de los físicos jónicos, el vocabulario de la física moderna le parecería, por hacer un fácil juego de palabras, "griego puro".

En Química, sustancias no más complicadas que el azúcar, el almidón o el alcohol tienen nombres como éstos: ácido metilpropenilenedihidroxicinamenilacrílico ó 0-anhidrosulfaminobenzoína o protocatechuicaldehidometileno.

Resultaría muy incómodo tener que emplear tales términos en nuestra conversación diaria. ¿Quién podría imaginar, aun a un aristócrata de la ciencia, en la mesa del desayuno diciendo: "Alcánceme, por favor, el ácido 0-anhidrosulfaminobenzoico", cuando todo lo que necesitaba era azúcar para su café?

La Biología tiene también retorcidos trabalenguas; pero el propósito de estas largas palabras no consiste en asustar a la gente, sino en describir, en forma científicamente concisa, lo que el literato expresaría en media página.

En Matemáticas hay muchas palabras corrientes, tales como "grupo", "familia", "anillo", "curva simple", "límite", etc. Pero a estas palabras comunes se les atribuye, algunas veces, un significado muy particular y técnico. En efecto, he aquí

una verdad de perogrullo: *La matemática es la ciencia que usa palabras sencillas para expresar ideas difíciles.* En esto difiere de cualquier otra ciencia. Existen 500.000 especies conocidas de insectos y cada una de ellas tiene un largo nombre en latín. En las matemáticas somos más modestos. Hablamos de "cuerpos", "grupos", "familias", "espacios", aunque atribuyendo a estas palabras mucho más significado del que las mismas implican en la conversación común. A medida que su uso se hace más y más técnico, nadie puede adivinar el sentido matemático de una palabra, así como uno no podría adivinar por qué una "farmacia"\* es un lugar donde venden helados y paraguas. Nadie podría acertar con el significado de la palabra "grupo" tal como se la emplea en matemáticas. Sin embargo, es de tal importancia, que se dictan cursos enteros sobre teoría de "grupos" y se escriben centenares de libros sobre este tema.

Debido a que los matemáticos se las arreglan con palabras comunes, se dan muchas ambigüedades divertidas. Por ejemplo, la palabra "función" expresa probablemente la idea más importante en toda la historia de las matemáticas. Sin embargo, la mayoría de las personas, al oírla, pensarán que una "función" significa un acontecimiento social nocturno, mientras que otras, menos dispuestas socialmente, pensarán en su hígado. La palabra "función" tiene, por lo menos, una docena de significados, pero poca gente sospecha su acepción matemática. Este significado (del cual nos ocuparemos detalladamente más adelante) se expresa, en su forma más simple, con una *tabla*. Dicha tabla da la relación existente entre dos cantidades variables cuando el valor de una de ellas está determinado por el valor de la otra. Así, una cantidad variable puede expresar los años transcurridos desde 1800

\* En Estados Unidos las *drugstores*, o farmacias, expenden, además de productos medicinales, gran variedad de artículos de uso común.



hasta 1938. y la otra el número de hombres que en los Estados Unidos usaban bigotes de guías: o una variable puede expresar en decibelios la cantidad de ruido producido por un orador político y la otra las unidades de presión sanguínea de sus oyentes. Usted probablemente no adivinaría jamás el significado de la palabra "anillo" tal como se la emplea en matemáticas, pues fue introducida en el álgebra moderna en los últimos cincuenta años. La teoría de anillos es mucho más reciente que la teoría de grupos. Se la encuentra en la mayoría de los libros de álgebra y nada tiene que ver con compromisos matrimoniales.

Otras palabras comunes empleadas en matemáticas, con un sentido muy particular, son "dominio", "integración", "diferenciación". Un lego jamás podría adivinar lo que representan; sólo los matemáticos lo sabrían. La palabra "trascendente", en matemáticas, no tiene el mismo significado que en filosofía. Un matemático diría: El número  $\pi$  igual a 3,14159... es trascendente, porque no es la raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Trascendente es nombre muy elevado para un número pequeño; fue inventado cuando se creía que los números trascendentes eran tan raros como los quintillizos. La obra de Georg Cantor en el reino del infinito ha demostrado que, de todos los números de las matemáticas, los trascendentes son los más corrientes, o, para usar el término con un sentido ligeramente distinto: los números trascendentes son los menos trascendentes. Hablaremos de esto último cuando nos refiramos a otro famoso número trascendente,  $e$ , la base de los logaritmos naturales. Cuando se usa la palabra trascendente, la gente culta podría pensar en la "epistemología trascendente" de Manuel Kant, pero, en ese sentido, nada tiene que ver con las matemáticas.

Por otra parte, tomemos la palabra "evolución", usada en matemáticas para denotar el procedimiento, aprendido por

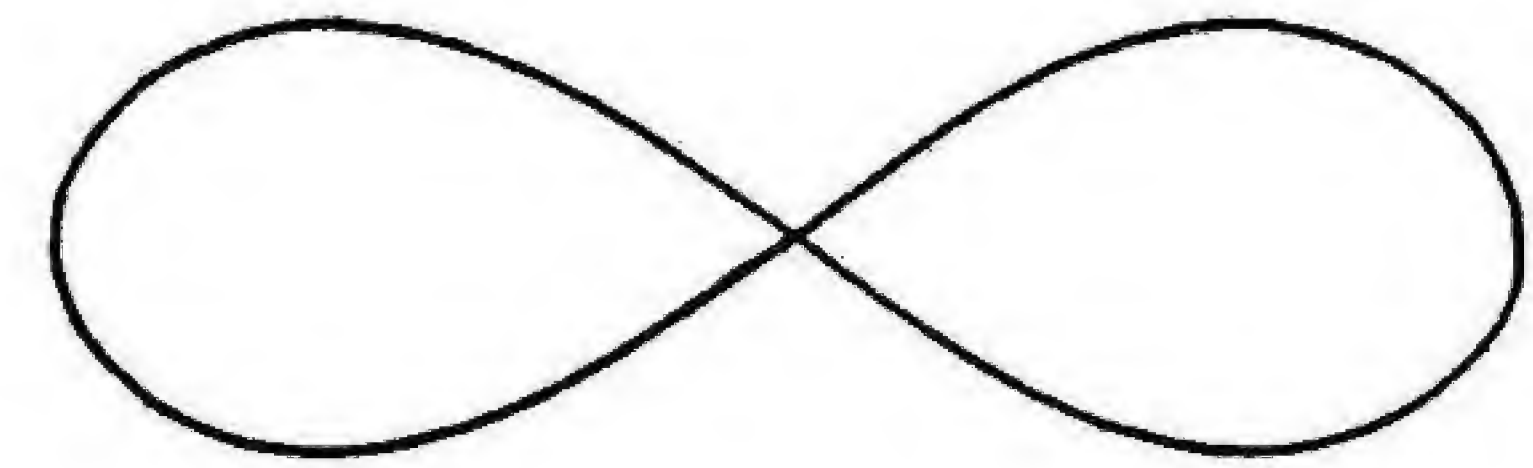


Fig. 1

muchos de nosotros en la escuela primaria (y prontamente olvidado), de extraer raíces cuadradas, cúbicas, etc. Spencer, en su filosofía, define la evolución como «una integración de la materia y una disipación del movimiento, desde una homogeneidad indefinida e incoherente a una heterogeneidad definida y coherente», etc. Pero eso, afortunadamente, nada tiene que ver con la evolución matemática.

Como vemos, las matemáticas se valen de palabras simples para expresar ideas complicadas. Ejemplo de palabra simple usada en forma complicada lo da el vocablo "simple". "Curva simple" y "grupo simple" representan conceptos importantes en matemáticas superiores.

La curva que aparece en la figura 1, no es una curva sim-

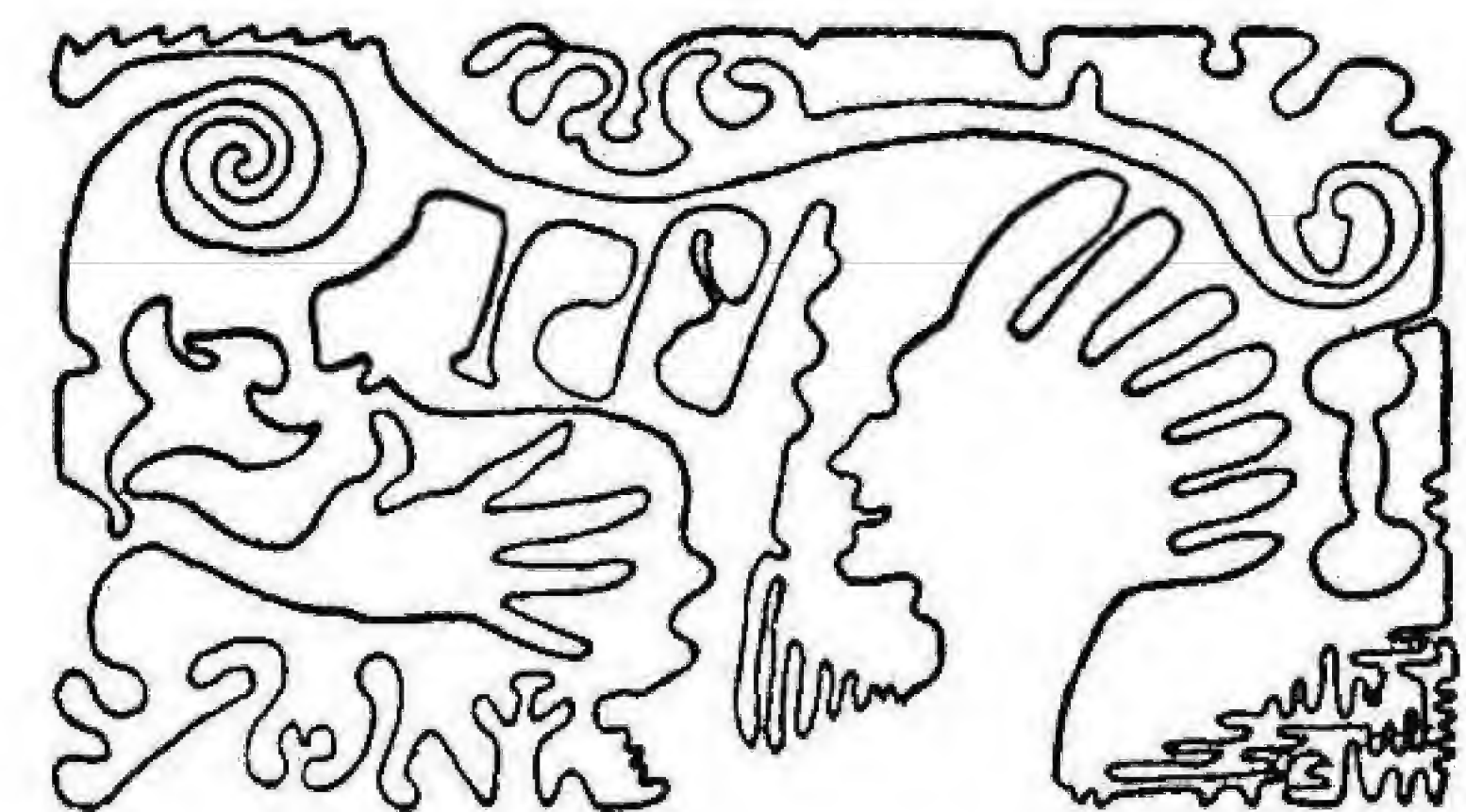


Fig. 2



ple. Una curva simple es una curva cerrada que no se corta a sí misma, y puede ser como la de la figura 2, por ejemplo. Hay muchos teoremas importantes sobre tales figuras que hacen que la palabra valga la pena. Más adelante hablaremos de una extraña clase de matemáticas, llamada "geometría de la lámina elástica", y tendremos mucho más que decir de las curvas simples y no simples. Un matemático francés, Jordan, dio el teorema fundamental: Toda curva simple del plano, tiene un interior y un exterior. Es decir, toda curva simple divide al plano en dos regiones, una, dentro de la curva y otra, fuera de ella.

Hay en matemáticas ciertos grupos llamados grupos "simples". La definición de "grupo simple" es, realmente, tan difícil, que no puede darse aquí. Si quisiéramos tener una idea clara de lo que es un grupo simple tendríamos que invertir, probablemente, largo tiempo estudiando muchos libros y luego, sin suficientes antecedentes matemáticos, posiblemente no comprenderíamos su verdadero sentido. Antes que nada, tendríamos que definir el concepto de "grupo". Luego tendríamos que dar una definición de "subgrupo" y posteriormente de subgrupo autoconjugado, y sólo entonces estaríamos capacitados para definir qué es un grupo simple. Un grupo simple es, sencillamente, un grupo sin ningún subgrupo autoconjugado —simple, ¿verdad?

A menudo se alude erróneamente a la Matemática como a la ciencia del sentido común, pero la realidad es que puede sobrepasar al sentido común e ir más allá de la intuición y de la imaginación. Se ha convertido en una materia muy extraña y quizás aterradora, desde el punto de vista ordinario; mas quien penetre en ella se encontrará en un verdadero país de hadas, un país de hadas extraño, pero que tiene sentido, ya que no sentido común. Desde el punto de vista ordinario las matemáticas se ocupan de cosas raras. Le demostraremos a usted que si bien de vez en cuando tratan de cosas extrañas,

casi siempre se ocupan de cosas familiares en una forma extraña. Si usted se mira en un espejo normal, sin hacer caso de sus atributos físicos, podrá usted encontrarse risible, pero no extraño; un viaje en subterráneo al parque de atracciones, y una nueva contemplación de su persona en uno de los espejos deformantes le convencerán que, desde otro punto de vista, usted puede ser extraño además de risible. Depende mucho de lo que uno esté acostumbrado a ver. Un campesino ruso, que visitó Moscú por vez primera, asistió a diversos espectáculos públicos. Fue también al zoológico y vio las jirafas. Quizás usted encuentre en su reacción una moraleja, como en las fábulas de La Fontaine: «Mire —dijo—, lo que los bolcheviques han hecho de nuestros caballos.» Eso es lo que las matemáticas modernas han hecho de la aritmética y de la geometría tradicionales.

Existen otras palabras y expresiones, no tan familiares, que han sido inventadas aún más recientemente. Tómese, por ejemplo, la palabra "turbina". Por supuesto que la misma ya era empleada en ingeniería, pero en cambio es completamente nueva en geometría. La acepción matemática de esta palabra se aplica a cierto diagrama. (La geometría, contra lo que puedan muchos pensar, se ocupa del estudio de

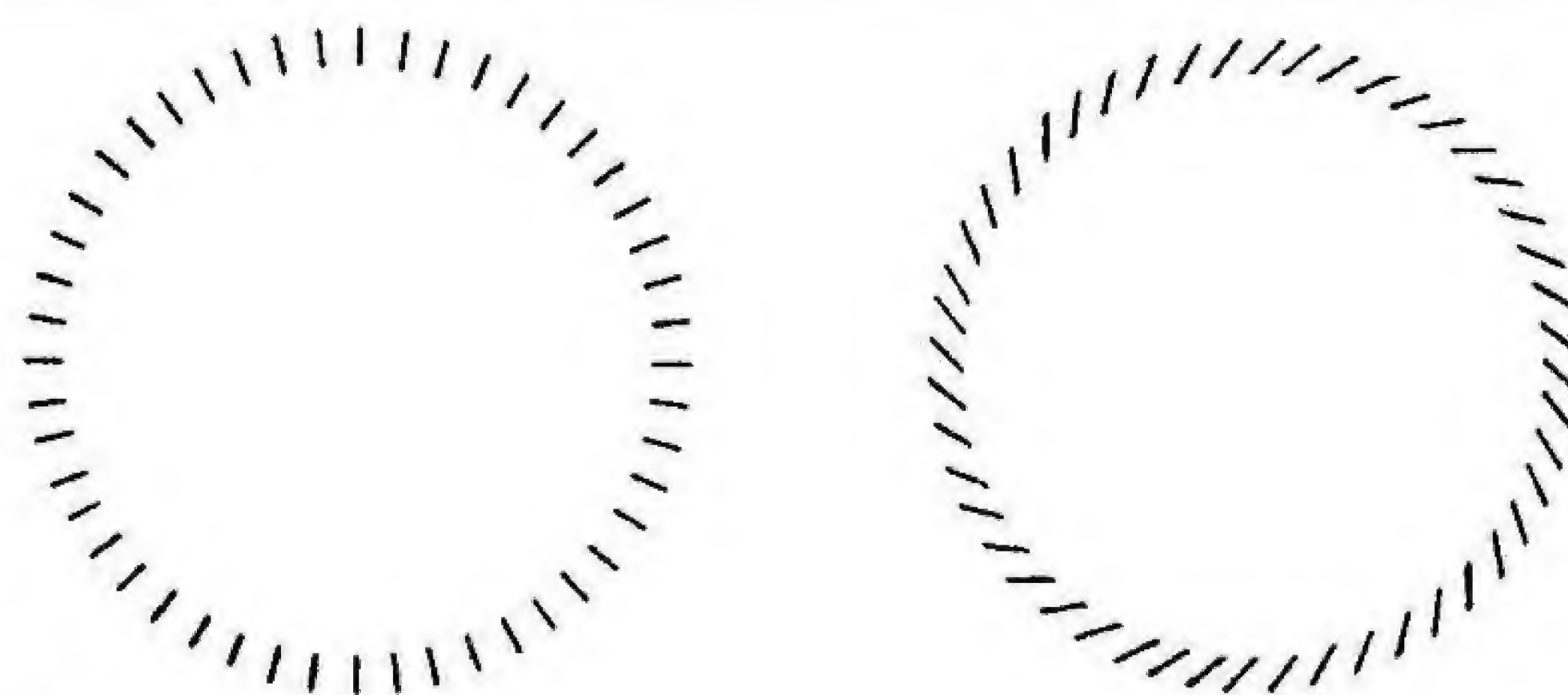


Fig. 3. Turbinas.



diferentes formas, muchas de ellas hermosas, y que poseen, además, armonía, gracia y simetría. Por supuesto que se han escrito libros voluminosos sobre geometría abstracta y espacio abstracto en los cuales no aparece ni un diagrama, ni siquiera una forma. Constituye ésta una rama muy importante de las matemáticas, pero no es la geometría estudiada por los egipcios y los griegos. La mayor parte de nosotros, si sabemos jugar al ajedrez, nos conformamos con hacerlo sobre un tablero con piezas de madera, pero hay algunas personas que lo juegan con los ojos vendados y sin tocar el tablero. Sería una acertada analogía decir que la geometría abstracta es como el ajedrez a ciegas, es un juego sin objetos concretos.)

La figura que antecede representa una turbina, en realidad dos de ellas.

Una turbina consiste en un número infinito de "elementos" insertados con continuidad. Un elemento no es simplemente un punto; es un punto con una dirección asociada—como en una lima de hierro. Una turbina está compuesta por un número infinito de estos elementos, acomodados de una manera particular: los puntos deberán estar dispuestos en un círculo perfecto y la inclinación de los filetes debe formar el mismo ángulo a todo lo largo del círculo. Hay, pues, un número infinito de elementos de igual inclinación con respecto a las tangentes del círculo. ¿Qué sucedería en el caso especial en que el ángulo formado por la dirección de un elemento y la dirección de la tangente fuese igual a cero? Pues que la turbina se convertiría en un círculo. En otras palabras, la teoría de las turbinas es una generalización de la teoría del círculo. Si el ángulo antes citado mide  $90^\circ$ , los elementos señalan hacia el centro del círculo y en ese caso especial estamos ante una turbina normal (véase el diagrama de la izquierda).

Existe una geometría de las turbinas en lugar de una geo-

metría de los círculos. Es una rama relativamente técnica de las matemáticas que se ocupa de la resolución de los grupos continuos de transformaciones relacionadas con ecuaciones diferenciales y con la geometría diferencial. La geometría relacionada con las turbinas tiene el nombre, algo raro, de "giros y deslizamientos".

El círculo es una de las figuras más antiguas en matemáticas. La línea recta es la línea más simple, pero el círculo es la más simple de las curvas. Se le considera, a menudo, como el límite de un polígono regular, de un número infinito de lados. Usted mismo podrá observar que a medida que se inscribe en un círculo una serie de polígonos, en la que cada uno de éstos tiene más lados que su predecesor, cada polígono tiende a asemejarse más y más a un círculo<sup>1</sup>.

Los griegos ya estaban familiarizados con la idea de que, a medida que aumenta el número de lados de un polígono regular, éste difiere cada vez menos del círculo en el cual está inscrito. Realmente, bien podría ser que ante los ojos de

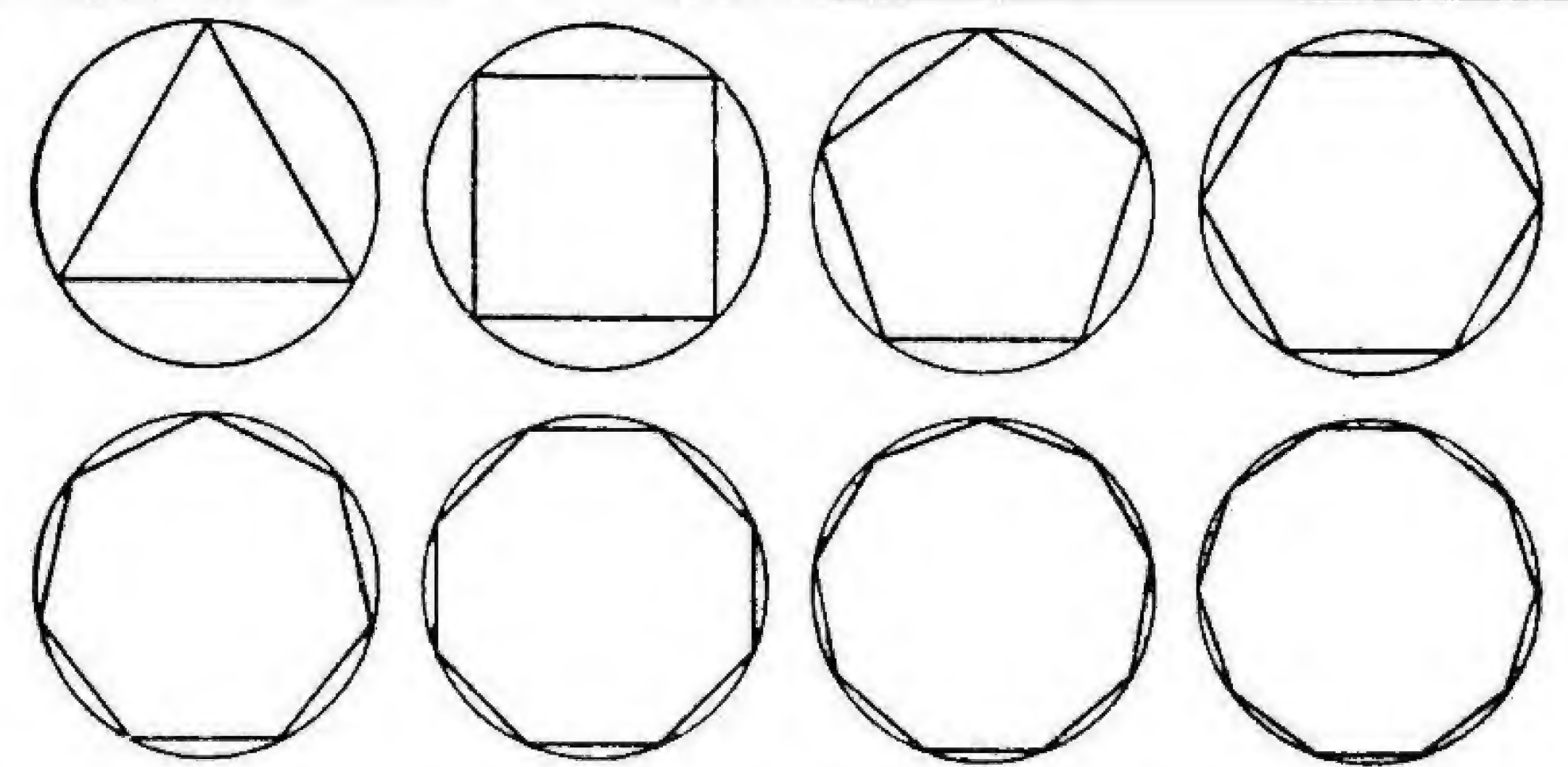


Fig. 4. El círculo como límite de polígonos inscritos.



un ser omnisciente, el círculo se presentara como un polígono de un infinito número de lados rectilíneos<sup>2</sup>. Sin embargo, a falta de completa omnisciencia, continuaremos considerando al círculo como una curva no recta. Cuando se estudia al círculo desde este punto de vista, surgen algunas interesantes generalizaciones. Existe, por ejemplo, el concepto indicado por la palabra “ciclo”, que fue puesta en uso por el matemático francés Laguerre. Un ciclo es un círculo con una flecha, como éste:

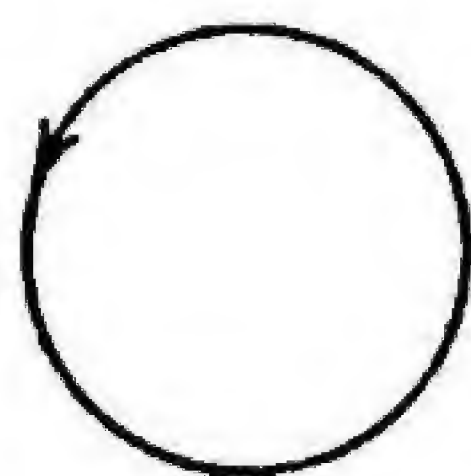
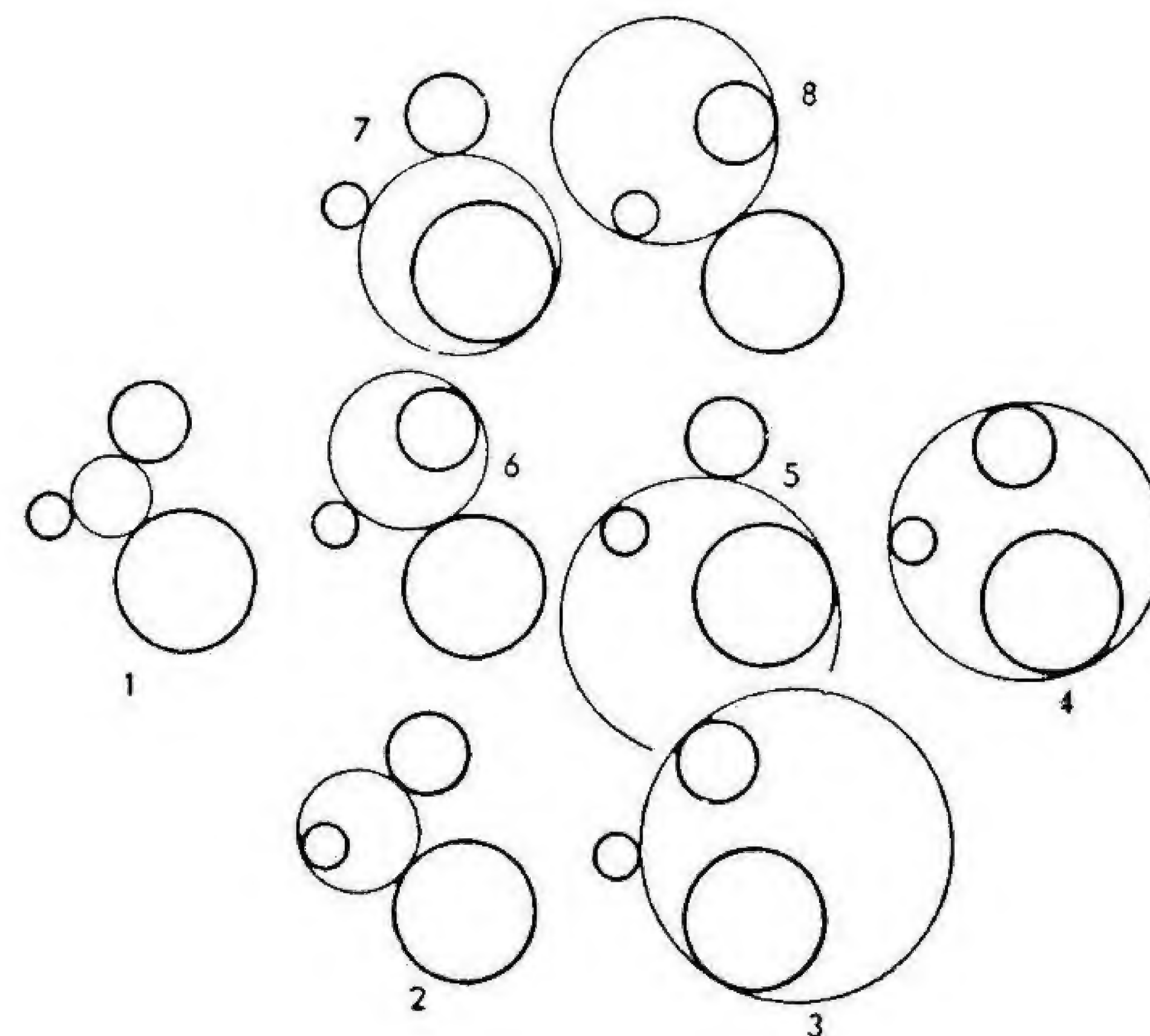


Fig. 5

Si al mismo círculo se le pone una flecha en sentido opuesto, se convertirá en un ciclo diferente.

Los griegos fueron especialistas en el arte de plantear problemas que ni ellos, ni las generaciones de matemáticos que los sucedieron, fueron capaces de resolver. Discutiremos más adelante los tres problemas más famosos de este tipo: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo.

Muchos matemáticos bien intencionados, autodesignados y autounidos, y una gran cantidad de locos y maniáticos, desconocedores tanto de la historia como de las matemáticas, aportan, cada año, una abundante cosecha de “soluciones” a estos problemas insolubles. Sin embargo, algunos de los problemas clásicos de la antigüedad han sido resueltos. Por ejemplo, la teoría de los ciclos fue empleada por Laguerre en la solución del problema de Apolonio que se enuncia así: Dados tres círculos fijos, hallar otro círculo tangente a los tres. Resulta ser una cuestión de geometría elemental de escuela secundaria, aunque implica inventiva y cualquier estu-

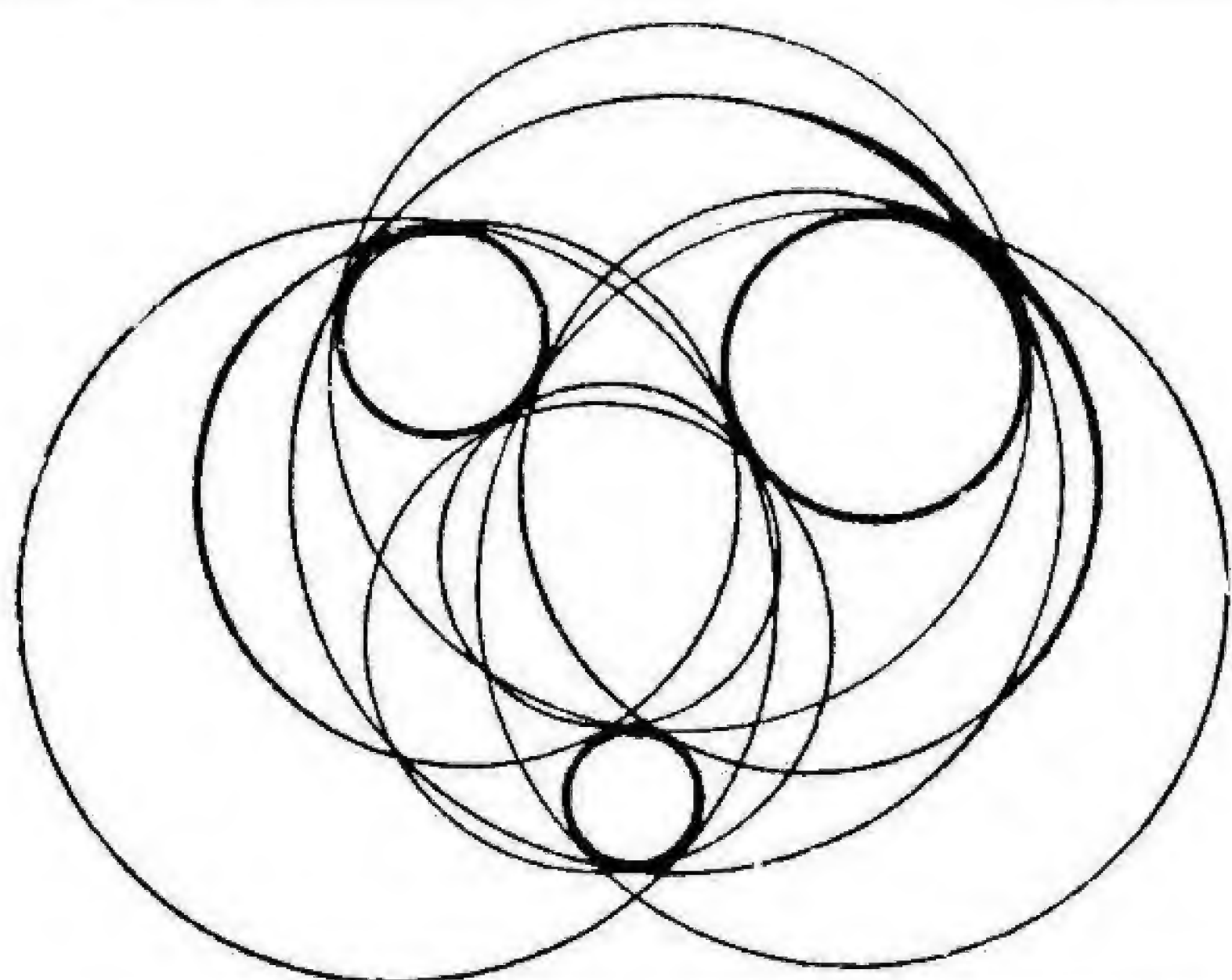


**Fig. 6(a).** Las ocho soluciones del problema de Apolonio. Cada círculo en trazo fino es tangente a los otros tres dibujados con un trazo más grueso.

diente aventajado podría intentar resolverlo. Tiene ocho soluciones, como se indica en la figura 6(a).

Todas ellas pueden construirse con regla y compás y se han encontrado muchos métodos de solución. Dados tres círculos, habrá ocho círculos tangentes a ellos. Dados tres ciclos, sin embargo, habrá un solo ciclo en el sentido dextrógiro, que sea tangente a los tres. (Se dice que dos ciclos son tangentes entre sí, únicamente si la dirección de sus flechas coincide en el punto de contacto.) De este modo, utilizando el concepto de los ciclos, tenemos una solución definida en





**Fig. 6(b).** Las ocho soluciones de Apolonio reunidas en un solo diagrama.

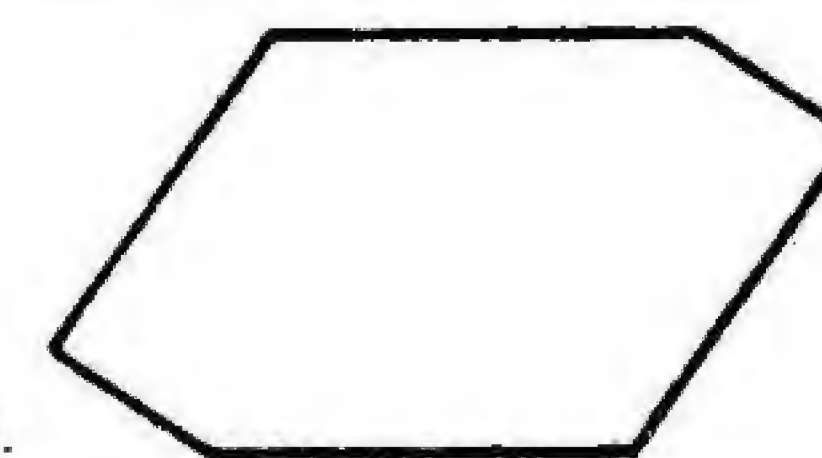
lugar de ocho. Con el concepto de ciclo, Laguerre fundó las bases de una elegante teoría.

Otra variante del círculo, introducida por el eminente matemático norteamericano C. J. Keyser, es la que se obtiene tomando un círculo y quitándole un punto<sup>3</sup>. Ello supone un cambio conceptual muy serio. Keyser lo denomina un “pato-círculo” (de círculo patológico) y lo ha utilizado en la discusión de la lógica de los axiomas.

Aún hemos hecho otra alteración en el concepto de círculo, introduciendo con ello otra palabra y un nuevo diagrama. Tómese un círculo y en lugar de quitarle un punto destáquese uno de ellos como punto inicial. Esto se llamará un “reloj” y ha sido usado en la teoría de funciones poligénicas. “Poligénica” es una palabra adoptada en la teoría de funciones complejas allá por el año 1927. Existía ya una noción importante, la de función monogénica, propiciada en el siglo XIX por el famoso matemático francés Augustin de Cauchy y usada en la teoría clásica de funciones. Se la emplea

para indicar funciones que tienen una sola derivada en un punto, como en el cálculo diferencial. Pero la mayor parte de las funciones, en el dominio complejo, tienen un número infinito de derivadas en un punto. Si una función no es monogénica jamás podrá ser bigénica o trigénica. La derivada tiene, o bien un único valor, o un número infinito de valores —será monogénica o poligénica, pero nunca intermedia. Monogénica, implica una única variación de crecimiento; poligénica, en cambio, muchas variaciones. La derivada completa de una función poligénica está representada por una congruencia (un doble infinito) de relojes, todos ellos con distinto punto de origen, pero con la misma rapidez uniforme de rotación. Sería inútil intentar dar una explicación simplificada de estos conceptos. (El neófito tendrá que ser indulgente con nosotros, en algunos breves intervalos como éste, en atención al lector matemático más experimentado.)

El paso ha sido relativamente difícil en el último párrafo, y por si algunas de las olas poligénicas lo han arrastrado al agua, le arrojaremos un salvavidas hexagonal. Podemos pasar a considerar una palabra muy simple, que ha sido utilizada en la geometría elemental para designar cierta clase de hexágono. La palabra sobre la cual deberá usted fijar su atención es “parhexágono”. Un hexágono común tiene seis lados arbitrarios. Un parhexágono, por el contrario, es aquel hexágono particular en el cual un lado es a la vez igual y paralelo al lado opuesto (como en la fig. 7).

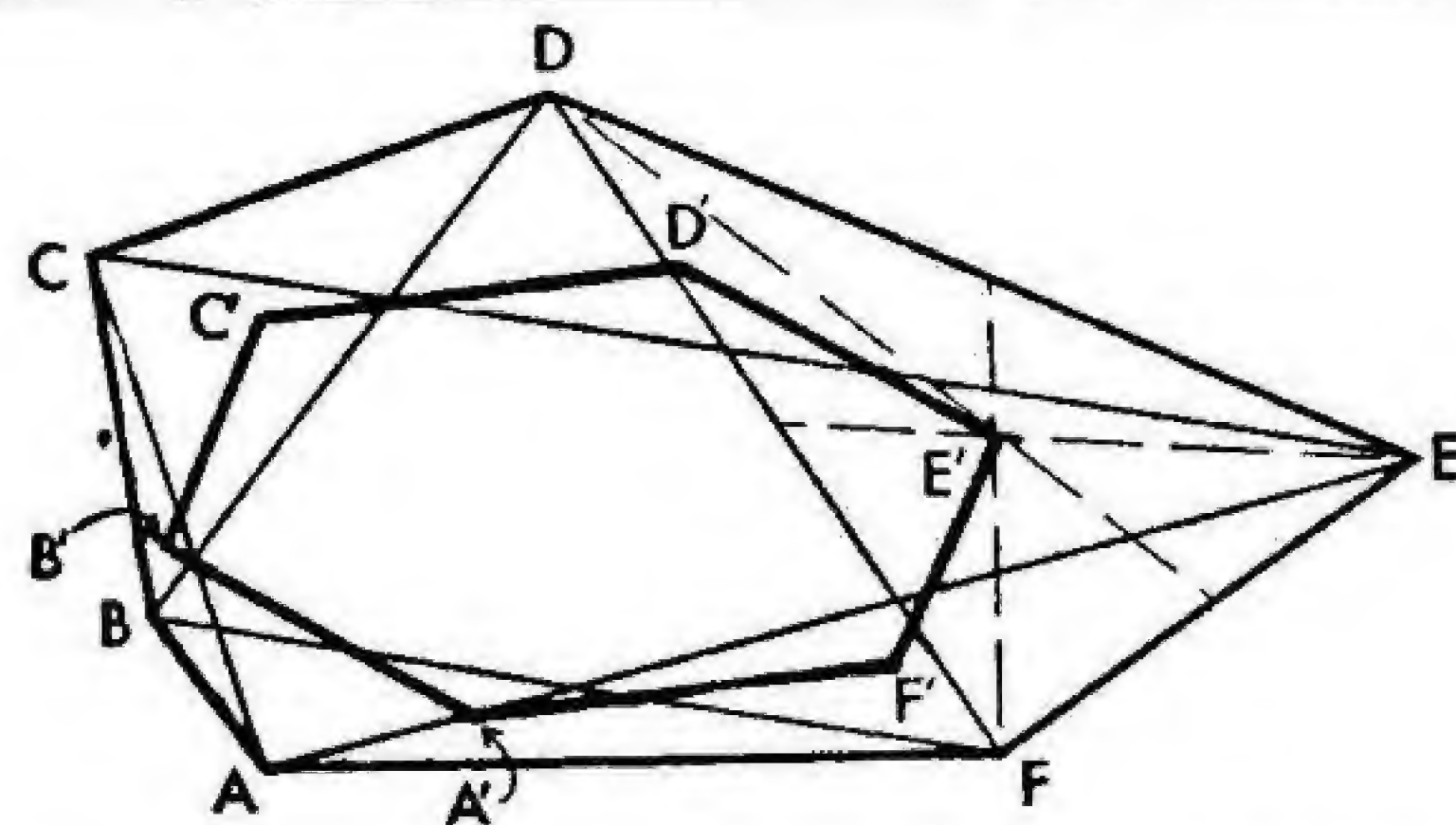


**Fig. 7.** El parhexágono.



Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos se le llama paralelogramo. Con el mismo razonamiento que aplicamos para la palabra parhexágono, podríamos haber llamado “parcuadrángono” a un paralelogramo.

Damos a continuación un ejemplo de un teorema sobre el parhexágono; tómese un hexágono irregular cualquiera, no necesariamente parhexágono, ABCDEF. Trácese las diagonales AC, BD, CE, DF, EA y FB formando los seis triángulos, ABC, BCD, CDE, DEF, EFA y FAB. Determinéense los



**Fig. 8.** ABCDEF es un hexágono irregular. A'B'C'D'E'F' es un parhexágono.

seis baricentros: A', B', C', D', E' y F' de estos triángulos. (El baricentro, o centro de gravedad de un triángulo, es el punto respecto del cual el triángulo quedaría en equilibrio indiferente si fuese una figura de cartón recortado y estuviese sustentada sólo por ese punto, que, por otra parte, coincide con el punto de intersección de las medianas.) Trácese A'B', B'C', C'D', D'E', E'F' y F'A' nuevo hexágono interior A'B'C'D'E'F' será siempre un parhexágono.

Todos conocen el significado de radical: es decir, raíz cuadrada, cúbica, cuarta, quinta, etc. Combinando con ésta

una palabra ya definida, podríamos decir que la extracción de una raíz es la evolución de un radical. La raíz cuadrada de 9 es 3; la raíz cuadrada de 10 es mayor que 3; y la más famosa, a la vez que la más simple de todas las raíces cuadradas, el primer número inconmensurable descubierto por los griegos, la raíz cuadrada de 2 es 1,414... Hay también radicales compuestos —expresiones como:  $\sqrt{7} + \sqrt[5]{10}$ . El símbolo de un radical no es la hoz y el martillo, sino un signo que data de hace tres o cuatro siglos; y el concepto de radical matemático es aún más antiguo. El concepto de “hiperradical” o “ultraradical”, que significa algo superior a un radical, pero inferior a un trascendente, es de origen reciente. Tiene un símbolo especial que veremos a su tiempo. Antes debemos decir unas pocas palabras sobre los radicales en general. Existen ciertos números y funciones en matemáticas que son bien comprendidos. Muchas de las ideas para las cuales no hay representaciones concretas o diagramáticas son difíciles de explicar. La mayoría de las personas no pueden pensar sin palabras; es necesario, pues, darles una palabra y un símbolo para fijar su atención. Caen dentro de esta categoría los términos hiperradical o ultraradical para los cuales, hasta ahora, no ha habido ni palabras ni símbolos.

Encontramos por primera vez estos ultraradicales al tratar de resolver ecuaciones de quinto grado. Los egipcios resolvieron las ecuaciones de primer grado hace quizá 4.000 años. Es decir, encontraron que la solución de la ecuación:  $ax + b = 0$ , representada en geometría por una línea recta, es:

$$x = \frac{-b}{a}$$

La ecuación de segundo grado:  $ax^2 + bx + c = 0$  fue resuelta por los hindúes y los árabes, con la fórmula:



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las distintas secciones cónicas, el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola son las representaciones geométricas de las ecuaciones de segundo grado con dos variables.

Luego, en el siglo XVI, los italianos resolvieron las ecuaciones de tercero y cuarto grados, mediante fórmulas explícitas que utilizaban raíces cúbicas y cuárticas. De manera que, allá por el año 1550, pocos años antes del nacimiento de Cervantes, habían sido resueltas las ecuaciones de primero, segundo, tercero y cuarto grados. Hubo luego una pausa de 250 años, porque los matemáticos estaban luchando con la ecuación de quinto grado, la "quintica general". Finalmente, en los comienzos del siglo XIX, Ruffini y Abel demostraron que las ecuaciones de quinto grado no podían ser resueltas con radicales. La quintica general no es, pues, como la ecuación cuadrática, cúbica o bien bicuadrática general. Sin embargo, dicha ecuación plantea un problema algebraico, que teóricamente puede ser resuelto mediante operaciones algebraicas. Sólo que estas operaciones son tan difíciles, que no pueden expresarse con los símbolos utilizados para los radicales. Estos nuevos elementos superiores se denominan "ultrarradicales" y también ellos tienen sus símbolos especiales (indicados en la fig. 9).

Combinando esos símbolos con los radicales podemos resolver ecuaciones de quinto grado. Por ejemplo, la solución de:  $x^5 + x = a$  podría escribirse  $x = \sqrt[5]{a}$  o  $x = \sqrt[5]{a}$ . La



Fig. 9. Un retrato de dos ultrarradicales.

utilidad del nombre y del símbolo especial es manifiesta. Sin ellos, la solución de la ecuación de quinto grado no podría expresarse en forma compacta.

Nos permitiremos dar ahora algunos conceptos algo más fáciles que los que hasta aquí nos han ocupado. Estas ideas fueron expuestas, hace algún tiempo, a un cierto número de niños de un jardín de infancia. Fue sorprendente comprobar cuán bien comprendieron todo lo que se les dijo, hasta el punto de que es realmente razonable afirmar que a los niños de jardín de infancia pueden gustarles las disertaciones sobre matemáticas para graduados, siempre que se les presenten en forma clara los conceptos.

Estaba lloviendo y se preguntó a los niños cuántas gotas de lluvia caerían sobre Nueva York. La respuesta más alta fue: 100. Nunca habían contado más allá de 100 y lo que querían decir, al usar dicho número, era simplemente algo muy, muy grande —lo más grande que ellos podían imaginarse. Se les preguntó cuántas gotas de lluvia caían sobre la azotea, cuántas sobre la ciudad de Nueva York y cuántas sobre todo el estado de Nueva York en 24 horas. Pronto tuvieron una noción de la magnitud de estos números aun cuando no conocían los símbolos para representarlos. Al cabo de un rato estaban seguros de que el número de gotas de agua era muchísimo mayor que cien. Se les pidió que pensaran en el número de granos de arena de la playa de Coney Island y determinaron que el número de granos de arena y el de gotas de agua era aproximadamente el mismo. Pero lo importante es que los niños se dieron cuenta de que el número era *finito* y no *infinito*.

A este respecto demostraron su clara superioridad sobre muchos científicos que en el día de hoy aún usan la palabra infinito para indicar algún número grande, como por ejemplo un billón de billones.

Algo que dichos científicos no comprenden, evidente-



mente, es que el contar es una operación exacta\*. Puede ser maravillosa, pero no hay nada misterioso ni incierto al respecto. Si se cuenta algo, el resultado que obtendrá será entero y exacto, o estará mal. No existe término medio. Es como coger un avión. O lo alcanza, o lo pierde; y si lo pierde por una fracción de segundo es lo mismo que si hubiese llegado al aeropuerto una semana después de la salida.

Hay una famosa cita que ilustra esto:

"Cuánto se gana con un poco más  
y ¡cuánto se pierde con un poco menos!"

Un número grande es grande, pero es definido y es finito. Por supuesto que en poesía, lo finito termina alrededor de 3.000; cualquier número mayor es infinito. En muchos poemas, el poeta hablará del número infinito de estrellas, pero si alguna vez hubo una hipérbole, ésta lo es, ya que nadie, ni siquiera el poeta, ha visto alguna vez más de 3.000 estrellas en una noche clara, sin el auxilio de un telescopio.

Para los hotentotes el infinito comienza en tres \*\*. Pregúntele a un hotentote cuántas vacas posee y si tiene más de tres responderá "muchas". El número de gotas de lluvia que caen sobre Nueva York es también "muchas". Es un número finito grande, pero no en modo alguno, cercano al infinito.

Pues bien, he aquí el nombre de un número muy grande: Gúgol<sup>\*\*\*</sup>. Mucha gente diría: "Un gúgol es tan grande que no se puede nombrar o hablar de él, es tan grande que es infinito." Por lo tanto, hablaremos de él, explicando exacta-

\* Nadie afirmaría que  $1 + 1$  es "casi igual a 2". Esto es tan disparatado como decir que un billón de billones no es un número finito, simplemente porque es grande. Cualquier número que puede ser nombrado o concebido mediante números enteros, es finito. *Infinito* significa algo completamente diferente, como lo veremos en el capítulo sobre el gúgol.

\*\* Aunque con toda justicia debe señalarse que algunas de las tribus del Congo Belga pueden contar hasta un millón y aún más.

\*\*\* No tiene nada que ver, ni de lejos, con un autor ruso

mente qué es y demostrando que pertenece a la mismísima familia que el número 1.

Un gúgol es el número que uno de los niños del jardín de infancia escribió en el pizarrón:

[illegible]

La definición de un gúgol es: un 1 seguido de cien ceros. Se resolvió, después de cuidadosas investigaciones matemáticas en el jardín de infancia, que el número de gotas de lluvia que caían en Nueva York, en el término de 24 horas, o en un año, o aun en un siglo, es mucho menor que un gúgol. En realidad, el gúgol es un número más grande que los mayores números usados en física o en astronomía. Todos estos números requieren menos de cien ceros. Si bien es cierto que conocimientos como éste son, por supuesto, asequibles a todo el mundo, parecen constituir, sin embargo, un gran secreto en muchos sectores científicos.

Una publicación científica muy distinguida, apareció con la revelación de que el número de cristales de nieve necesarios para formar la era glacial era un billón a la billonésima potencia. Esto es muy sorprendente, y también muy tonto: Un billón a la billonésima potencia, se escribe así\*:

1.000.000.000<sup>1 000 000 000</sup>

Una apreciación más razonable y un número algo más pequeño, habría sido  $10^{30}$ . En efecto, se ha estimado que si el universo entero, que usted admitirá que es un poquito más

\* Sabido es que, en algunos países, se llama billón a mil millones, y no a un millón de millones: como se hace entre nosotros. (N. del T.)



grande que la Tierra, estuviese lleno de protones y electrones, de manera que no quedase espacio libre, el número total de protones y electrones sería  $10^{110}$  (es decir un 1 seguido de 110 ceros). Desgraciadamente, tan pronto como la gente habla de números grandes, pierde la chaveta. Parecen hallarse bajo la impresión de que, ya que cero es igual a nada, pueden agregar a un número tantos ceros como les plazca sin que ello traiga consecuencias serias. Tendremos que ser un poco más cuidadosos, pues, al hablar de números grandes.

Volviendo a Coney Island, el número de granos de arena de su playa es aproximadamente igual a  $10^{20}$ , o, en forma más descriptiva: 100000000000000000000. Éste es un número grande, aunque no tanto como el mencionado por la divorciada, en un reciente juicio de divorcio, que había telefoneado que amaba a su esposo "un millón de billones de billones, y ocho veces la vuelta al mundo". Era el mayor número que ella podía concebir y demuestra qué clase de cosas pueden incubarse en un nido de amor.

Si bien la gente habla mucho, la producción total de palabras pronunciadas, desde que comenzó a usarse la palabra, hasta la fecha, incluyendo toda el habla de los niños, los cantos de amor y los debates del Congreso, totaliza aproximadamente  $10^{16}$ . Es decir diez mil billones. Contrariamente a la creencia popular, éste es un número mayor de palabras que el que se habla, en promedio, en una velada de "bridge".

Mucha de la veneración hacia la autoridad de la palabra impresa se desvanecería si uno fuese a calcular el número de palabras que se han impreso desde que apareció la Biblia de Gutenberg. Es un número algo mayor que  $10^{16}$ . Una reciente y popular novela histórica, es la responsable de la impresión de varios cientos de miles de millones de palabras.

El mayor número visto en las finanzas (aunque se están estructurando nuevas marcas) representa la cantidad de dine-

ro en circulación en Alemania en el punto álgido de la inflación. Era menor que un gúgol, simplemente:

496,585,346,000,000,000,000

Un distinguido economista responde por la exactitud de esta cifra. El número de marcos en circulación era casi igual al número de granos de arena de la playa de Coney Island.

El promedio del número de átomos de oxígeno contenidos en un dedal es muchísimo mayor. Estaría representado quizá por 1000000000000000000000000000000. El número de electrones, cuyo tamaño es muchísimo más pequeño que el de los átomos, es mucho más grande. El número de electrones que pasan a través del filamento de una lámpara eléctrica común, de sesenta watts, en el término de un minuto, iguala al número de gotas de agua que caen por las cataratas del Niágara en un siglo.

Uno podría también calcular el número de electrones contenidos, no sólo en una habitación, sino en toda la Tierra y fuera de ella, en las estrellas, en la Vía Láctea y en todas las nebulosas. La razón que nos guía al dar todos estos ejemplos de números muy grandes es destacar el hecho de que, por muy grande que sea el conjunto a contarse, un número finito bastará. Tendremos ocasión de referirnos, más adelante, a conjuntos infinitos, pero aquellos que se encuentran en la naturaleza, si bien a veces son muy grandes, son todos, por descontado, finitos.

Un celebrado hombre de ciencia afirmó recientemente, con toda seriedad, que creía que el número de poros (por los cuales respiran las hojas) de todas las hojas, de todos los árboles en todo el mundo, sería, sin duda alguna, infinito. Es innecesario decir que no era un matemático. El número de electrones de una sola hoja es muchísimo mayor que el número de poros de todas las hojas de todos los árboles de



todo el mundo, y sin embargo, el número total de electrones en el universo entero, puede determinarse por medio de la física relativista. Es muchísimo menor que un gúgol —quizás un 1 seguido de 79 ceros,  $10^{79}$ , según lo calculado por Edington.

Palabras de sabiduría pronuncian los niños, por lo menos tan a menudo como los hombres de ciencia. El nombre "gúgol" fue inventado por un niño (sobrino del doctor Kasner, de nueve años de edad), a quien se le pidió que propusiera un nombre para un número muy grande, a saber: un 1 seguido de cien ceros. Estaba muy seguro de que este número no era infinito y, por lo tanto, igualmente en lo cierto de que tenía que tener un nombre. Al mismo tiempo que indicó la palabra "gúgol", sugirió el nombre para otro número aún mayor: "Gúgolplex". Un gúgolplex es mucho mayor que un gúgol, pero continúa siendo finito, como se apresuró a señalar el inventor de su nombre. Primero se sugirió que un gúgolplex sería un 1 seguido por tantos ceros que uno se cansase de escribirlos. Esto es una descripción de lo que sucedería si uno tratara realmente de escribir un gúgolplex, pero distintas personas se cansan en tiempos diferentes y no consideraríamos a Camera\* mejor matemático que al doctor Einstein, sencillamente porque tuviera más resistencia. El gúgolplex es, pues, un número finito determinado, formado por tantos ceros después de la unidad, que el número de ceros sea igual a un gúgol. Un gúgolplex es muchísimo mayor que un gúgol, muchísimo mayor aún que un gúgol de veces un gúgol. Un gúgol de veces un gúgol sería un 1 seguido de doscientos ceros, mientras que un gúgolplex es un 1 con un gúgol de ceros. Usted podrá formarse alguna idea de la magnitud de este número grandísimo, pero finito, por el hecho

de que no habría lugar suficiente para escribirlo si usted se dirigiese a la estrella más lejana, recorriendo todas las nebulosas y llenando de cada centímetro de camino.

Cuesta creer que un número tan grande pudiera tener realmente aplicación alguna vez, pero quien así pensara no sería matemático. Un número de la magnitud del gúgolplex podría tener un uso real en problemas de combinaciones. El tipo de problema en el cual podría aparecer científicamente sería el siguiente: Considere que este libro está compuesto de carbono, nitrógeno y otros elementos. La respuesta a la pregunta: ¿Cuántos átomos hay en este libro? sería, por cierto, un número finito, menor aún que un gúgol. Ahora imagine que el libro está suspendido por un cordel cuyo otro extremo usted sostiene. ¿Cuánto tiempo será necesario esperar antes de que el libro salte hasta su mano? ¿Concibe usted que ello pueda suceder alguna vez? Una respuesta sería: "No, eso jamás ocurrirá, a menos que intervenga alguna fuerza exterior." Pero eso no es correcto. La contestación correcta es que eso sucederá, casi con certeza, en algún momento, antes de que transcurra un gúgolplex de años —quizá mañana.

La explicación de esta respuesta podemos hallarla en la química-física; la mecánica estadística, la teoría cinética de los gases y la teoría de la probabilidad. No podemos desarrollar todos estos temas en unas pocas líneas, pero lo intentaremos. Las moléculas están en perpetuo movimiento. El reposo absoluto de las moléculas implicaría cero grados de temperatura absoluta y esta temperatura no sólo no existe, sino que es imposible de obtener. Todas las moléculas del aire circundante bombardean el libro. Por ahora el bombardeo desde arriba y desde abajo es aproximadamente el mismo y la gravedad ejerce también su acción sobre el libro. Es necesario, pues, esperar el momento favorable en el que un enorme número de moléculas bombardee el libro por debajo

\* Se hace referencia a un famoso boxeador (N. del R.)



y muy pocas por encima. La gravedad será entonces vencida y el libro se elevará. Sería algo similar al efecto conocido en física como movimiento browniano, que describe el comportamiento de las pequeñas partículas en un líquido, que danzan por todos lados debido al impacto de las moléculas. Sería análogo al movimiento browniano, a inmensa escala.

Pero la probabilidad de que esto suceda en un futuro próximo o en cualquier ocasión determinada que podamos mencionar, está comprendida entre  $\frac{1}{\text{gúgol}}$  y  $\frac{1}{\text{gúgolplex}}$ . En

otras palabras, para estar razonablemente seguros de que el libro se elevaría, tendríamos que esperar entre 1 gúgol y 1 gúgolplex de años.

Cuando se hacen trabajos de investigación sobre electrones o sobre problemas de análisis combinatorio, como el del libro, necesitamos números mayores que los usados comúnmente. Por esta razón, nombres como gúgol y gúgolplex, aunque parezcan simples bromas, tienen un valor real. Sus nombres contribuyen a fijar en nuestras mentes el hecho de que todavía estamos tratando con números finitos. Repetimos: un gúgol es  $10^{100}$ ; un gúgolplex es 10 elevado a la potencia gúgol, el cual podemos escribir así:  $10^{10^{100}} = 10^{\text{gúgol}}$ .

Hemos visto que el número de años que habría que esperar para ver el milagro del libro elevándose, sería menor que un gúgolplex. En ese número de años la Tierra bien podría convertirse en un planeta frío y muerto como la Luna, o quizá deshacerse en una cantidad de meteoros y cometas. El verdadero milagro no será que el libro se eleve, pero sí, que con la ayuda de las matemáticas podremos proyectarnos en el futuro y pronosticar, con exactitud, cuándo probablemente se elevará: es decir, algún día comprendido entre hoy y el año gúgolplex.

Hemos mencionado unos cuantos nombres completamente nuevos en matemáticas —nombres nuevos para conceptos viejos y nuevos.

Existe aún otro nuevo nombre que es conveniente citar antes de concluir. El popular divulgador científico Watson Davis nos ha dado la palabra "Matescopio".

Con el auxilio de los magníficos microscopios y telescopios modernos, el hombre, equidistante entre las estrellas y los átomos se ha aproximado un tanto a ambos. El matescopio no es un instrumento físico, es un instrumento puramente intelectual: la visión, siempre creciente, que las matemáticas proporcionan de ese país de hadas que queda más allá de la intuición y de la imaginación. Los matemáticos, a diferencia de los filósofos, nada dicen acerca de la verdad final, sino que pacientemente, como los constructores de los grandes microscopios y telescopios, pulen sus lentes. En este libro le haremos ver a usted a través de los lentes más nuevos y más poderosos que los matemáticos han pulimentado. ¡Prepárese, pues, para contemplar visiones extrañas a través del matescopio!

#### NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

- 1 Véase el capítulo sobre Pie. Página 9.
- 2 Véase el capítulo sobre Cambio y Mutabilidad. Sección sobre Curvas Patológicas. Página 10.
- 3 N. B. Éste es un diagrama que el lector tendrá que imaginar, pues escapa a la capacidad de todo impresor el trazar un círculo al que se le ha suprimido un punto. Como el punto carece de dimensiones, nunca sería echado de menos. De ahí que un círculo al que le falte un punto sea puramente conceptual, constituyendo por lo tanto una idea que no puede representarse gráficamente. Página 12.



## II. MÁS ALLÁ DE LOS GÚGOLES

*Si no esperáis lo inesperado, no lo encontraréis, dado que es penoso descubrirlo, y además, difícil.*

HERÁCLITO

Las matemáticas pueden muy bien ser una ciencia compuesta por proposiciones rigurosamente lógicas, organizadas de forma canónica y precisa; pero en sus innumerables aplicaciones tanto sirven de instrumento como de lenguaje para la descripción del número y de la magnitud. Con la misma facilidad, economía y elegancia, tanto permiten describir las órbitas elípticas de los planetas como la forma y dimensiones de esta página o la superficie de un trigal. Nadie puede ver cómo danzan los electrones al girar en torno al núcleo atómico; los telescopios más potentes alcanzan tan sólo a mostrarnos una escasa porción de las distintas estrellas y de los remotos y gélidos rincones del espacio. Pero con ayuda de las matemáticas, y de la imaginación, todo, lo muy pequeño y lo muy grande, puede ser puesto al alcance del hombre.

Contar es hablar el lenguaje de los números. Contar, sea hasta un gúgol, o tan sólo hasta diez, es las dos veces un mismo proceso; hasta el gúgol, más difícil de pronunciar. Lo esencial es comprender que el gúgol y diez son parientes, como lo son electrones y estrellas gigantes. La aritmética, el



lenguaje para contar, emparenta a todos, lo mismo en espacio que en tiempo.

Para comprender el significado e importancia de las matemáticas, para apreciar su belleza y valor, es preciso, ante todo, comprender la aritmética, pues, en su mayor parte, desde sus comienzos, las matemáticas han sido aritmética, con atavíos más sencillos o complicados. La aritmética ha sido reina y criada de las ciencias desde los tiempos de la astrología caldea y de los hierofantes egipcios hasta nuestros días, los días de la mecánica relativista, la teoría cuántica y el florecer de la informática. Podrán los historiadores disentir sobre el significado de los antiguos papiros, podrán los teólogos argumentar sobre la exégesis de las Escrituras, podrán los filósofos especular sobre las doctrinas pitagóricas, pero todos habrán de convenir en que los números que aparecen en los papiros, en las Escrituras, y las obras pitagóricas son los mismos números que usamos hoy. Las matemáticas, hechas aritmética, han ayudado al hombre a hacer horóscopos y calendarios, a pronosticar las crecidas del Nilo, a medir terrenos, a calcular la altura de las Pirámides, a determinar la velocidad de caída de una piedra al caer desde una cierta torre de Pisa, o de una manzana, al caer de un árbol, en Woolsthorpe; gracias a ella se han podido pesar las estrellas y los átomos, marcar con hitos el correr del tiempo, y hallar la curvatura del espacio. Y aunque el cálculo infinitesimal, la teoría de probabilidades, el álgebra lineal o la topología también sean matemáticas, éstas son aún, en gran medida, el arte de contar.

Todos los lectores de este libro saben contar. Sin embargo, ¿saben qué es contar? Las definiciones que dan los diccionarios recuerdan a la que daba el de Johnson para "red", que rezaba, "una serie de intersticios reticulados". *Saber con-*

*tar es saber comparar.* Los números son algo muy posterior, como abstracción y artificio que son. Las facultades de contar y comparar son tan connaturales al hombre como sus dedos. Y sin unas y otros, sería muy difícil que hubiese llegado a los números.

Para comparar dos colecciones de objetos y averiguar en cuál hay más y en cuál menos, no se precisa conocer ningún método formal de recuento. Sin saber nada de los números, se puede determinar si dos colecciones de objetos tienen la una tantos elementos como la otra; por ejemplo (salvo accidentes) es fácil demostrar que hay en cada mano igual número de dedos que en la otra: basta juntarlas, y observar su exacto emparejamiento.

Para describir este proceso de emparejamiento, fundamento del contar, los matemáticos utilizan un nombre pintoresco. Lo llaman "definir una correspondencia biunívoca entre clases", o con lenguaje algo más moderno, "establecer una biyección" entre los conjuntos. En realidad, en ello reside todo el arte de contar, ya lo practiquen pueblos primitivos, nosotros mismos, o Einstein. Con un par de ejemplos lo aclararemos.

En los países donde se practica la monogamia no es necesario contar por separado a los maridos y las mujeres para averiguar el total de personas casadas. Si descontamos el reducido número de bigamos que no acatan la costumbre o la ley, bastará contar a los maridos o a las esposas. Habrá exactamente tantas personas en un conjunto como en el otro. La correspondencia que existe entre ambas clases es biunívoca.

Hay ejemplos más útiles. En un salón están reunidas muchas personas; hay que darle asiento a todas. El problema es si habrá sillas suficientes, o si sobrarán o faltarán. Costaría trabajo contar las sillas, y más aún, las personas. En este caso sería trabajo perdido. En los jardines de infancia, los niños



suelen jugar a "Ir a Sevilla". En la sala, llena de niños, hay una silla de menos. A una señal, cada niño corre a ocupar una silla; quien quede sin ella "se va a Sevilla", y es eliminado. Se retira entonces una silla, y el juego continúa. He aquí la solución de nuestro problema. Basta pedir a las personas del salón que tomen asiento. Si todos logran sentarse, y no quedan sillas vacías, es evidente que habrá tantas sillas como personas. Con otras palabras, sin conocer ni el número de personas ni el de sillas, se sabe que este número es el mismo. Las dos clases, la de sillas y la de personas, son iguales en número, dado que hay entre ellas una correspondencia biunívoca, o "uno a uno", como también se dice. A cada persona le corresponde una silla, y recíprocamente, cada silla, tiene asignada una persona.

No es otro el procedimiento que se emplea para contar una colección de objetos cualesquiera. Por una parte está el conjunto de objetos a contar; por otra, una colección que siempre tenemos a mano. Esta colección es el conjunto de los números enteros positivos, los "números naturales", que por convenio, consideramos vienen ordenados del modo siguiente: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Emparejando, en correspondencia "uno a uno", los elementos de la primera clase con los números naturales, experimentamos un fenómeno que no por corriente es menos maravilloso, a saber, que el último número natural utilizado para completar el emparejamiento indique *cuántos* elementos hay.

Para aclarar la idea de contar partimos de la suposición, de la que no hay garantía, de que el concepto de número es comprendido por todo el mundo. El concepto de número puede parecer intuitivamente claro, pero no obstante, se requiere una definición precisa. Si bien la definición puede parecer peor remedio que la enfermedad, no es tan difícil como

parece a primera vista. Léala cuidadosamente y verá que es, al mismo tiempo, explícita y económica.

Dada una clase  $C$ , que contiene ciertos elementos, es posible encontrar otras clases, tales que los elementos de cada una de ellas puedan ser emparejados, uno a uno, con los elementos de  $C$ . (Cada una de estas clases es así llamada "equivalente a  $C$ ".) Todas estas clases, incluyendo a  $C$ , cualquiera que sea el carácter de sus elementos, participan de una propiedad común: todas ellas tienen el mismo *número cardinal*, que se denomina *número cardinal* de la clase  $C$ <sup>1</sup>.

Entonces, el número cardinal de la clase  $C$  es el *símbolo* que representa el conjunto de todas las clases que pueden ponerse en correspondencia biyectiva con  $C$ . Por ejemplo, el número 5 es simplemente el nombre, o símbolo, asignado al conjunto de todas las clases, cada una de las cuales puede ponerse en correspondencia biyectiva con los dedos de una mano.

De aquí en adelante podemos referirnos sin ambigüedad al número de elementos de una clase como al número cardinal de dicha clase, o más brevemente, como "su cardinalidad". La pregunta: "¿Cuántas letras hay en la palabra *matemáticas*?" equivale a preguntar: "¿Cuál es la cardinalidad de la clase cuyos elementos son las letras de la palabra *matemáticas*?" Empleando el método de correspondencia biyectiva, el siguiente gráfico contesta la pregunta e ilustra el método:

M	A	T	E	M	A	T	I	C	A	S
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Es evidente ahora que este método no es ni extraño ni misterioso; no fue inventado por los matemáticos para hacer que algo natural y fácil parezca antinatural y difícil. Es el mé-



todo empleado cuando contamos nuestras monedas o nuestros pollos, es el método apropiado para contar cualquier clase, no importa qué tan grande, desde diez hasta un gúgolplex —y más allá.

Pronto nos referiremos al “más allá” cuando volvamos a ocuparnos de las clases que no son finitas. En realidad trataremos de *medir nuestro conjunto de medida*: los números naturales. Por lo tanto, es preciso comprender a fondo las correspondencias uno-a-uno, pues nos aguarda una revelación sorprendente: los conjuntos infinitos también pueden contarse, y por los mismísimos medios. Pero antes de intentar contarlas practiquemos con algunos números muy grandes —grandes, pero no infinitos.

“Gúgol” ha sido ya incorporado a nuestro vocabulario. Es un número grande: un 1 seguido de cien ceros. Mayor aún es el gúgolplex: un 1 seguido de un gúgol de ceros. La mayor parte de los números que se encuentran en la descripción de la naturaleza son mucho más pequeños, aunque algunos pocos son mayores.

En la ciencia moderna suelen aparecer números enormes. Sir Arthur Eddington sostiene que hay, no aproximadamente sino exactamente,  $136 \cdot 2^{256}$  protones\*, e igual número de electrones, en el Universo. Aunque no es fácil de imaginar, este número, como símbolo escrito en el papel, ocupa poco lugar. Ni siquiera es tan grande como el gúgol y queda completamente empequeñecido ante el gúgolplex. Sin embargo, el número de Eddington, el gúgol y el gúgolplex, son finitos.

\* No hay por qué suponer que sir Arthur los ha contado. Pero tiene una teoría para justificar su afirmación. Cualquiera que tenga una teoría mejor puede contradecir a sir Arthur. Pero, ¿quién puede ser el juez? He aquí el número exacto, según sostiene, hasta la última cifra: 15.747.724.136.275.002.577.605.653.961.181.555.468.044.717.914.527.116.709.366.231.425.076.185.631.031.296.

Un verdadero gigante es el número de Skewes: mucho mayor aún que el gúgolplex. Sirve para indicar la distribución de los números primos<sup>2</sup> y se escribe así:

$$10^{10^{10^{34}}}$$

O, por ejemplo, el número total de jugadas posibles en un juego de ajedrez, que es:

$$10^{10^{50}}$$

Y hablando de ajedrez, como señaló el eminente matemático inglés G. H. Hardy, si imaginamos al Universo entero como un tablero de ajedrez, a los protones que hay en él como piezas de dicho juego, y si convenimos en llamar “jugada”, en este juego cósmico, a cualquier intercambio en la posición de dos protones, el número total de jugadas posibles, por una extraordinaria coincidencia, sería el número de Skewes:

$$10^{10^{10^{34}}}$$

No hay duda que la mayoría de la gente cree que dichos números forman parte del maravilloso progreso de la ciencia y que hace unas pocas generaciones, para no hablar de siglos atrás, nadie podría haberlos concebido, ni en sueños, ni con la imaginación.

Hay en ello algo de verdad. Por una parte, los antiguos y engorrosos métodos de notación matemática hacían muy difícil, cuando no realmente imposible, la escritura de grandes números. Por otra parte, el ciudadano medio de hoy encuentra cifras inmensas similares como expresión de gastos en armamentos y de las distancias estelares, de manera que está completamente familiarizado, e inmunizado, con los grandes números.



Pero había gente inteligente en la antigüedad. Los poetas de toda época podrán haber cantado a las estrellas como infinitas en número, cuando todas las que alcanzaban a ver eran, acaso, tres mil. Sin embargo, Arquímedes no se desconcertaba por un número grande como un gúgol, o aún mayor. Lo dice en un pasaje de introducción a su obra "El arenario", verificando que un número no es infinito por el solo hecho de ser enorme.

"Hay algunos, Rey Gelon, que piensan que el número de granos de arena es infinito en multitud y yo me refiero a la arena que existe, no sólo en las proximidades de Siracusa y en el resto de Sicilia, sino también a la que se encuentra en otras regiones, ya sean habitadas o no. Por otra parte, hay algunos que, sin considerarlo como infinito, piensan que aún no se ha fijado un número lo suficientemente grande, como para exceder su multitud. Y es claro que aquellos que sostienen este punto de vista, se imaginasen una masa formada por "arena, tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella todos los mares y las depresiones, llenos hasta una altura igual a la de la montaña más alta, tendrían todavía mayores dificultades para reconocer que podría expresarse algún número, lo suficientemente grande, como para exceder la multitud de la arena así tomada. Pero trataré de probar mediante demostraciones geométricas que vos podréis seguir, que, de los números nombrados por mí e indicados en la obra que envié a Zeuxippus, algunos exceden, no sólo el número de la masa de arena igual en magnitud a la Tierra rellena en la forma descrita, sino también la de una masa igual en magnitud al Universo".

Los griegos tenían ideas muy definidas acerca del infinito. Así como les estamos reconocidos por muchos de nuestros juicios y de nuestra ciencia, así también les debemos muchos de nuestros sofismas respecto al infinito. En realidad, si hubiéramos conservado siempre su claridad de visión, no habrían surgido jamás muchos de los problemas y paradojas relacionados con el infinito.

Ante todo, debemos darnos cuenta de que, "muy grande" e "infinito", son completamente distintos\*. Teóricamente, por el método de la correspondencia uno a uno, los protones y los electrones del Universo pueden contarse con la misma facilidad que los botones del chaleco. Suficientes y más que suficientes para esta tarea o para la tarea de contar cualquier colección finita son los números enteros. Pero medir la *totalidad de los números enteros* es otro problema. La medición de este conjunto exige un más elevado punto de vista. Además de ser, como lo pensó el matemático alemán Kronecker, obra de Dios, lo que requiere fe para apreciarla, la clase de los números enteros es infinita —lo cual es muchísimo más inconveniente. ¡Es más que herejía, pretender medir nuestra propia e interminable vara de medir!

Los problemas del infinito han desafiado la mente del hombre, y encendido su imaginación como ningún otro problema de la historia del pensamiento humano. El infinito nos parece, a un mismo tiempo, tan extraño como familiar. Algunas veces, más allá de nuestra comprensión; otras, natural y fácil de entender. Al conquistarlo, el hombre rompió las cadenas que lo aprisionaban a la Tierra. Para esta conquista se requirieron todas sus facultades: su capacidad de raciocinio, su fantasía poética y su afán de saber. Para establecer la ciencia del infinito se requiere el principio de *inducción matemática*. Este principio afirma la fuerza del raciocinio por recurrencia o repetición. Simboliza casi todo el pensamiento matemático, todo lo que hacemos cuando construimos agregados complejos partiendo de elementos simples. Es, como

---

\* No hay un punto donde lo muy grande comience a confundirse con el infinito. Usted puede escribir un número tan grande como le plazca, no estará más cerca del infinito que el número 1 ó el número 7. Asegúrese que usted entiende muy claramente esta distinción y habrá dominado muchas de las sutilezas del transfinito.



lo destacó Poincaré, "a la vez, necesaria al matemático, e irreductible a la lógica". El enunciado del principio reza así: "Si una propiedad es cierta para el número 1 y si demostramos que será verdadera para  $n + 1$ \*, siempre que lo sea también para  $n$ , la propiedad será verdadera para la totalidad de los números naturales." La inducción matemática no deriva de la experiencia, sino que más bien constituye una propiedad de la mente, intuitiva, inherente y casi instintiva: *"Lo que hemos hecho una vez lo podemos hacer nuevamente."*

Si podemos formar números hasta diez, hasta un millón, hasta un gúgol, llegamos a la conclusión de que no hay barrera, de que no hay fin. Convencidos de esto, no necesitamos proseguir eternamente, la mente llega a comprender lo que nunca ha experimentado: el infinito mismo. Sin ninguna sensación de discontinuidad, sin transgredir los cánones de la lógica, el matemático y el filósofo han tendido un puente sobre el golfo que separa lo finito de lo infinito. Las matemáticas del infinito constituyen una confirmación completa del poder innato de razonar por recurrencia.

Probablemente todo el mundo comprende el significado de "infinito" en la acepción de "sin fin, sin límites", sencillamente, de "no finito". En tanto no se requiera una definición precisa, ello no plantea dificultades. No obstante, y a pesar del famoso aforismo según el cual la matemática es la ciencia en la que no se sabe de qué estamos hablando, ni si lo que se dice es cierto, será necesario, al menos, ponernos de acuerdo para hablar sobre lo mismo. Como es obvio, incluso personas de temperamento científico pueden polemizar agriamente, y llegar, a veces, hasta la difamación personal, sobre toda clase de cuestiones, desde el marxismo y el materialismo dialéctico, hasta la teoría de grupos y el principio de indeterminación, para descubrir, próximos ya al agota-

miento y el fallo cardíaco, que se encuentran del mismo lado de la valla. Tales discusiones son muchas veces consecuencia de una terminología vigorosa. Suponer que todo el mundo está familiarizado con la definición matemática precisa de "infinito" equivale a construir nuevamente la Torre de Babel.

Antes de intentar dar una definición, haríamos bien en volver la mirada, y ver cómo enfocaron el problema los matemáticos y filósofos de otras épocas.

Hay en lo infinito dos facetas, lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Se han propuesto, para demostrar o refutar su existencia, multitud de razonamientos y demostraciones, luego descartados y más tarde vueltos a resucitar. Pocos de estos razonamientos han sido rebatidos alguna vez; han ido quedando enterrados bajo la avalancha de otros. Feliz resultado de todo ello ha sido que el problema nunca ha llegado a resolverse\*.

La lucha, que comenzó en la antigüedad, con las paradojas de Zenón, jamás ha cesado. Los puntos dudosos, fueron discutidos con un fervor digno de los primeros mártires cristianos, pero sin una décima parte del cacumen de los teólogos de la Edad Media. Hoy en día algunos matemáticos opinan que el infinito ha sido reducido a un estado de vasallaje. Otros están todavía preguntándose qué es.

Los rompecabezas de Zenón pueden ayudar a enfocar mejor el problema. Zenón de Elea, como se recordará, dijo algunas cosas inquietantes sobre el movimiento al referirse a una flecha, a Aquiles y a la tortuga. Esta extraña asociación fue empleada en defensa del principio de la filosofía eleática, de que todo movimiento es una ilusión. Algunos, probablemente "críticos contrariados", han sugerido que "Zenón mismo no hablaba en serio cuando propuso sus rompecabezas".

---

\* Nadie ha escrito más brillante e ingeniosamente a la vez sobre este tema que Bertrand Russell. Véase particularmente sus ensayos en el volumen *Mysticism and Logic*.

---

\* Donde  $n$  es cualquier número entero, positivo



Prescindiendo del motivo de los mismos, baste decir que son extraordinariamente sutiles y, quizá por eso, desafían aún hoy toda solución\*.

Una paradoja —la de dicotomía— afirma que es imposible recorrer una distancia dada. He aquí el razonamiento: primero, debe recorrerse la mitad de la distancia; luego, la mitad de la distancia restante; luego, otra vez, la mitad de la que queda y así sucesivamente. ¿Se deduce que siempre queda alguna parte de la distancia a recorrer y, por lo tanto, el movimiento es imposible! Una solución de esta paradoja consiste en ver

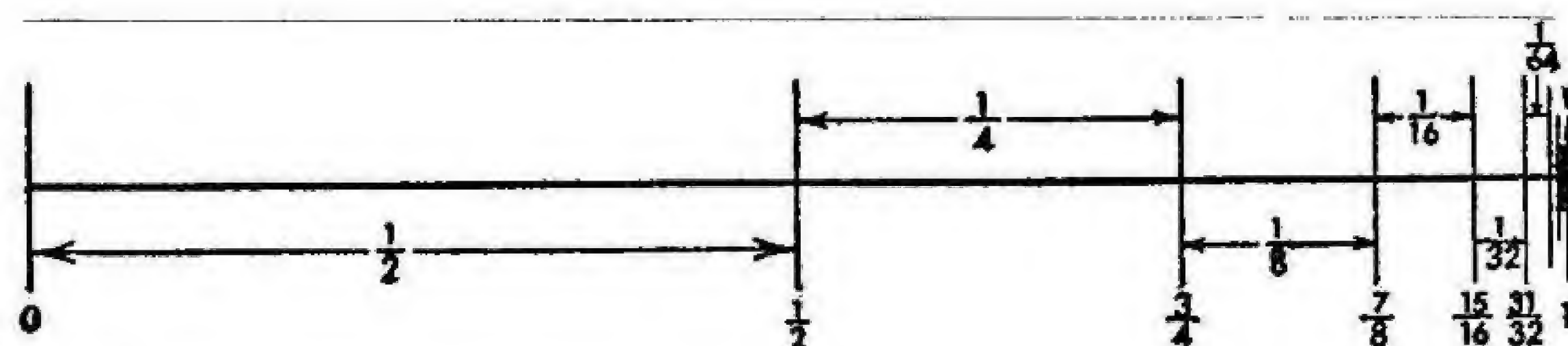


Fig. 10

que las distancias sucesivas a recorrer forman una serie geométrica infinita:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

cada uno de cuyos términos es la mitad del que le precede. Aunque esta serie tiene un infinito número de términos, su suma es *finita* e igual a 1. En esto, se dice, radica el defecto de la dicotomía. Zenón supuso que cualquier totalidad, compuesta de un número infinito de partes debe, en sí misma, ser

\* Es indudable que se han dado para las paradojas diversas explicaciones. En último análisis, las explicaciones de los acertijos se basan en la interpretación de los fundamentos de las matemáticas. Matemáticas como Brouwer, que descartan el infinito no aceptarían probablemente, ninguna de las soluciones dadas

infinita, mientras que, como acabamos de ver, un infinito número de elementos forman la totalidad finida, a saber, 1.

La paradoja de la tortuga establece que Aquiles, corriendo para alcanzar la tortuga, debe llegar primero al lugar de donde ésta partió. Para cuando Aquiles llegue, la tortuga habrá avanzado un poco. Esta comedia se repite, sin embargo, indefinidamente. A medida que Aquiles llega a cada nuevo punto de su carrera, la tortuga, que había estado allí, ya lo ha abandonado. A Aquiles le resulta tan imposible alcanzarla, como a los jinetes de un carrusel, al jinete que va adelante.

Finalmente, la flecha en vuelo debe estar moviéndose en todo instante de tiempo. Pero a cada instante debe estar en *algún lugar* del espacio. Sin embargo, si la flecha debe estar siempre en algún sitio, no puede, en cada instante, estar también en tránsito, pues estar en tránsito equivale a estar en *ninguna parte*.

Aristóteles y otros santos menores, de casi todas las épocas, trataron de destruir estas paradojas, pero no lo hicieron muy hábilmente. Tres profesores alemanes triunfaron donde los santos habían fracasado. A fines del siglo XIX, parecía que Bolzano, Weierstrass y Cantor habían dejado tranquilo al infinito, así como a las paradojas de Zenón.

El método moderno de tratar las paradojas no consiste en descartarlas como simples sofismas, indignos de merecer seria atención. La historia de las matemáticas, en efecto, refiere una poética rehabilitación de la actitud de Zenón. El famoso matemático y filósofo inglés Bertrand Russell ha dicho que Zenón fue "una notable víctima de la falta de juicio de la posteridad". Esa injusticia ha sido reparada. Al ocuparse de lo infinitamente pequeño, Weierstrass demostró que la flecha en movimiento *está*, realmente, siempre en reposo y que nosotros vivimos en el mundo inalterable de Zenón. La obra de Georg Cantor, como pronto veremos, demostró que si creemos que Aquiles *puede* alcanzar a la tortuga, debemos estar



preparados para admitir una paradoja aún mayor que todas las que Zenón jamás pudo haber concebido: ¡EL TODO NO ES MAYOR QUE MUCHAS DE SUS PARTES!

Lo infinitamente pequeño había sido un engorro durante más de dos mil años. Aun en las mejores circunstancias, las innumerables opiniones que provocó merecieron el lacónico veredicto de los tribunales escoceses: “No probado.” Hasta que apareció Weierstrass, el progreso total fue una confirmación del argumento de Zenón contra el movimiento.

Hasta las bromas fueron mejores. Según Carlyle, Leibniz cometió el error de tratar de explicar a una reina —Sofía Carlota de Prusia— el cálculo infinitesimal. Ella le manifestó que la conducta de sus cortesanos la había familiarizado tanto con lo infinitamente pequeño, que no necesitaba un preceptor matemático para que se lo explicara. Pero los filósofos y matemáticos, según Russell, “teniendo menos conocimiento de las cortes, continuaron discutiendo este tópico, aunque sin lograr adelanto alguno”.

Berkeley, con la sutileza y humor propios de un obispo irlandés, hizo algunos satíricos ataques a los infinitésimos, durante el período de la adolescencia del cálculo, ataques provistos del duro e ingenioso aguijón de la mejor escolástica. Se podía quizá hablar, al menos con fervor poético, de lo infinitamente grande, pero, ¿qué era lo infinitamente pequeño? Los griegos, renunciando a su acostumbrada perspicacia, lo introdujeron al considerar que un círculo difería infinitesimalmente de un polígono que tuviese un gran número de lados iguales. Leibniz lo usó para construir el cálculo infinitesimal. Sin embargo, nadie sabía qué era. Lo infinitesimal tenía propiedades asombrosas. No era cero y sin embargo era menor que cualquier cantidad. No se le podía asignar ni cantidad ni tamaño, y ello no obstante, un número algo grande de infinitesimales forma una cantidad perfectamente definida. Incapaz de descubrir su naturaleza, mas, por fortuna, capaz de

hacer caso omiso de ella, Weierstrass la enterró junto al flogisto y demás errores otrora apreciados.

Más obstinada fue la resistencia que presentó lo infinitamente grande. Sea lo que fuere, demostró ser mala hierba. Esta cuestión, sobre la que se han escrito desatinos por resmas, fue analizada por primera vez de modo lógico, completo y sin los prejuicios que serían de temer en un clérigo por el checo Bernhard Bolzano, en un pequeño y extraordinario volumen, titulado *Die Paradoxien des Unendlichen* (Las paradojas del infinito), publicado en 1851 como obra póstuma. Lo mismo que la obra de otro sacerdote, el austriaco Gregor Mendel, cuyo notable tratado sobre los principios de la herencia sólo escapó al olvido por casualidad, este importante libro de Bolzano, de redacción encantadora, no produjo gran impresión entre sus contemporáneos. Es la creación de una inteligencia clara, poderosa y penetrante. Por vez primera en veinte siglos, el infinito fue tratado como problema científico, y no teológico. Tanto Cantor como Dedekind están en deuda con Bolzano, por haber dado éste fundamento al tratamiento matemático de lo infinito. Entre las muchas paradojas que Bolzano recopiló y explicó, una de ellas, que databa de la época de Galileo, ejemplifica una típica fuente de confusión.

Constrúyase un cuadrado  $ABCD$ . Tomando como centro el punto  $A$  y con una abertura del compás igual al lado, trácese un cuadrante de circunferencia, que intersecte al cuadrado en  $B$  y  $D$ . Trácese  $PR$  paralela a  $AD$ , de tal manera que corte a  $AB$  en  $P$ , a  $CD$  en  $R$ , a la diagonal  $AC$  en  $N$  y a la cuarta parte del círculo en  $M$ .

Por un teorema de geometría, muy conocido, puede demostrarse que si  $PN$ ,  $PM$  y  $PR$  son radios, existe la siguiente relación:



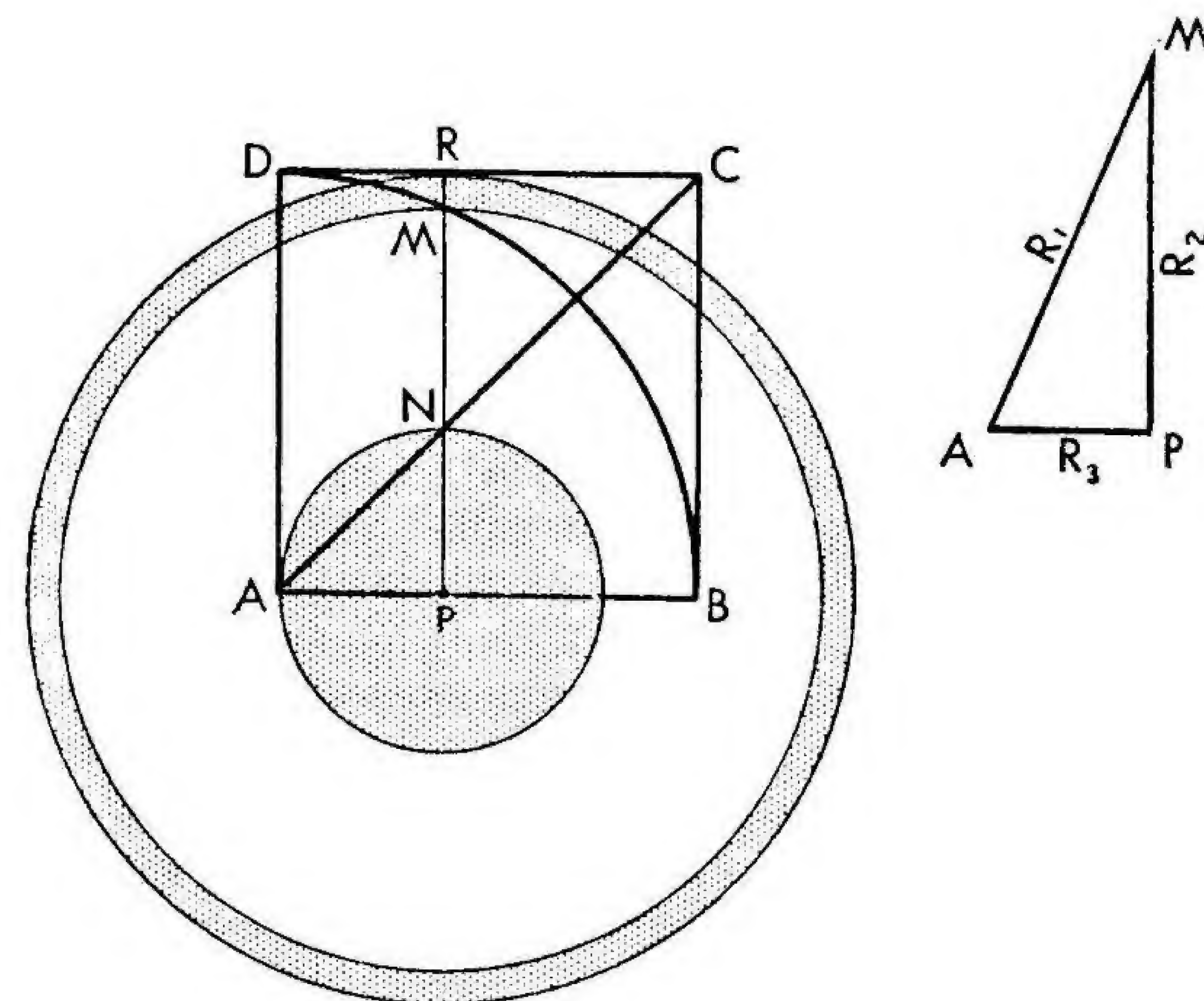
$$\pi \overline{PN}^2 = \pi \overline{PR}^2 - \pi \overline{PM}^2 \quad (1)$$

Hágase que  $PR$  se aproxime a  $AD$ , entonces el círculo de radio  $PN$  se hace más pequeño, y otro tanto ocurre con el anillo formado por los círculos de radios  $PM$  y  $PR$  a medida que uno de sus radios,  $PM$ , aumenta. Finalmente, cuando  $PR$  se confunda con  $AD$ , el radio  $PN$  desaparece quedando el punto  $A$  mientras que el anillo comprendido entre los dos círculos  $PM$  y  $PR$  se convierte en el perímetro del círculo de radio  $AD$ . De acuerdo a la ecuación (1) se llega a la conclusión de que el punto  $A$  ocupa tanta superficie como la circunferencia de círculo de radio  $AD$ .

Bolzano comprendió que aquí sólo hay una *apariencia* de paradoja. Las dos clases de puntos, una compuesta de un solo miembro, el punto  $A$ , y la otra de los puntos que hay en la circunferencia de círculo de radio  $AB$ , ocupan exactamente la misma cantidad de superficie. ¡El área de cada una de ellas es igual a cero! La paradoja nace de la equivocada noción de que el número de puntos de una figura dada tiene relación con el área de la porción de superficie que ocupa. Los puntos carecen de tamaño y dimensión, y en número finito (e incluso en muchos casos, infinito), no pueden llenar superficie alguna.

En el transcurso de los siglos han ido acumulándose paradojas similares. Nacidas de la unión de ideas imprecisas y de dudosas reflexiones de índole filosófica, fueron desarrollándose, fundadas en nociones imperfectas. Bolzano aclaró en gran medida la confusión, dejando expedito el camino a Cantor. A Cantor debe la matemática de lo infinitamente grande haber alcanzado la mayoría de edad.

Georg Cantor nació en San Petersburgo en 1845<sup>4</sup>, seis años antes de que apareciese el libro de Bolzano. Aunque nacido en Rusia, vivió la mayor parte de su vida en Alemania,



**Fig. 11.** Sustráigase el triángulo  $APM$  de la figura. Es fácil ver que sus tres lados son iguales, respectivamente, a los radios de los tres círculos.

Luego:

$$R_1^2 - R_2^2 = R_3^2$$

o bien:

$$\pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi R_3^2$$

o bien: las dos superficies sombreadas son iguales.



donde fue profesor en la Universidad de Halle. Mientras Weierstrass estaba ocupado tratando el cálculo infinitesimal, Cantor se dedicó a la tarea opuesta, aparentemente más formidable. Uno podría reírse de la existencia de lo infinitamente pequeño, pero ¿quién se animaría a reírse de lo infinitamente grande? Por cierto que no iba a ser Cantor. La curiosidad teológica lo impulsó en su tarea, aunque el interés matemático se antepuso a cualquier otro.

Tratando la ciencia del infinito, Cantor comprendió que el primer requisito consistía en definir términos. Su definición de “clase infinita”, que parafraseamos, se basta en una paradoja: UNA CLASE INFINITA TIENE LA SINGULAR PROPIEDAD DE QUE EL TODO NO ES MAYOR QUE ALGUNA DE SUS PARTES. Esta proposición es tan esencial para las matemáticas del infinito como la que expresa: EL TODO ES MAYOR QUE CUALQUIERA DE SUS PARTES, para la aritmética finita. Si recordamos que dos conjuntos son equivalentes cuando sus elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, esta última proposición resulta evidente. Zenón no se habría animado a contradecirla, a pesar de su escepticismo acerca de lo evidente. Pero lo que para lo finito es evidente, es falso para lo infinito; nuestra amplia experiencia con los conjuntos finitos es engañosa. Por ejemplo, puesto que los conjuntos de humanos y de matemáticos son ambos finitos, alguien, al comprobar que algunos hombres no son matemáticos, llegaría correctamente a la conclusión de que la clase de los humanos es la más grande de las dos. También podría inferir que el número de enteros, pares e impares, es mayor que el número de enteros pares. Pero vemos, de acuerdo con el siguiente emparejamiento, que se equivocaría:

1	2	3	4	5	6	7...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	4	6	8	10	12	14...

Debajo de cada número entero, par o impar, podemos escribir su duplo —que es un número entero par. Es decir, colocamos cada uno de los elementos del conjunto de todos los números naturales, tanto los impares como los pares, en una correspondencia biunívoca con los elementos de la clase compuesta únicamente por números naturales pares. Es posible continuar este proceso hasta el gúgolplex y más allá todavía.

Ahora bien, el conjunto de los números naturales es infinito. Ningún número natural, no importa cuán grande sea, puede describir su cardinalidad (o “numerosidad”). Sin embargo, puesto que es posible establecer una correspondencia biyectiva entre la clase de los números pares y la clase de los números naturales, hemos logrado contar la clase de los números pares del mismo modo que contamos una colección finita. Estando perfectamente equiparadas las dos clases, debemos llegar a la conclusión de que tienen la misma cardinalidad. Que su cardinalidad es la misma, *lo sabemos*, al igual que supimos que las sillas y las personas que había en el salón eran iguales en número cuando cada silla estaba ocupada y nadie quedó de pie. De este modo llegamos a la paradoja fundamental de todas las clases infinitas: Existen partes componentes de una clase infinita que son tan grandes como la clase misma. ¡EL TODO NO ES MAYOR QUE ALGUNA DE SUS PARTES!

La clase compuesta por los números enteros pares es un conjunto entresacado de la clase de todos los números enteros, pero, evidentemente el “entresacar” no tiene el más leve efecto sobre su cardinalidad. Además casi no hay límite al número de veces que puede repetirse este proceso. Por ejemplo, hay tantos números elevados al cuadrado y al cubo como números enteros. Los emparejamientos apropiados son:



1	2	3	4	5	6	...	1	2	3	4	5	6	...
↑	↑	↑	↑	↑	↑		↑	↑	↑	↑	↑	↑	
1	4	9	16	25	36	...	1	8	27	64	125	216	...
$1^2$	$2^2$	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$		$1^3$	$2^3$	$3^3$	$4^3$	$5^3$	$6^3$	

En realidad, de cualquier clase numerable puede siempre sacarse un número numerable infinito de clases numerables infinitas, sin que ello altere el cardinal de la clase original.

Cantor llamó *contables* o *numerablemente infinitas* a las clases infinitas que pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los números naturales y, por lo tanto, ser “contadas”. Ya que todos los conjuntos finitos son contables y dado que podemos asignar un número a cada uno de ellos, es natural que tratemos de extender la noción de número, asignando a la clase de todos los números naturales, un número que exprese su cardinalidad. Sin embargo, es evidente, de acuerdo a nuestra descripción de “conjunto finito”, que ningún número entero ordinario sería adecuado para describir la cardinalidad de toda la clase de los números enteros. En efecto, sería como pedirle a una culebra que se tragase a sí misma, toda entera. De este modo, fue creado el primero de los números transfinitos para describir la cardinalidad de las clases infinitas numerables. Se sugirió representarlo con un símbolo etimológicamente antiguo, pero matemáticamente nuevo: la primera letra del alfabeto hebreo,  $\aleph$  (aleph). Sin embargo, Cantor, decidió finalmente usar el símbolo compuesto  $\aleph_0$  (aleph-cero). Si se nos pregunta “¿cuántos números naturales hay?”, sería correcto contestar: “Hay  $\aleph_0$  números naturales.”

Debido a que Cantor sospechó que había otros números transfinitos, más aún, un número infinito de transfinitos y que la cardinalidad de los números naturales era la más pequeña

de todas, le añadió a la primera  $\aleph$  un cerito como subíndice. La cardinalidad de una clase numerable infinita se indica, por lo tanto con  $\aleph_0$  (aleph-subcero). Los números transfinitos que hemos anticipado forman una jerarquía de alephs:  $\aleph_0$ ,  $\aleph_1$ ,  $\aleph_2$ ,  $\aleph_3$ ,...

Todo esto puede parecer muy extraño, y sería completamente disculpable que el lector se encontrase, a esta altura, enteramente desconcertado. Sin embargo, si usted ha seguido el razonamiento precedente, paso por paso, y se toma la molestia de releerlo, verá que nada de cuanto se ha dicho es incompatible con el correcto razonamiento. Habiendo establecido el significado de contar en el dominio de lo finito, y lo que significa número, decidimos hacer extensivo el proceso de contar a las clases infinitas. En cuanto a nuestro derecho para llevar a cabo tal procedimiento, es el mismo, por ejemplo, de aquellos que decidieron que el hombre se había arrastrado bastante sobre la superficie de la Tierra y que ya le había llegado el tiempo de volar. Es nuestro derecho a aventurarnos en el mundo de las ideas así como el de ampliar nuestras miras en el universo físico. En estas aventuras de ideas solamente se nos impone una restricción: que procedamos de acuerdo con las reglas de la lógica.

Al extender el proceso de contar, en seguida saltó a la vista que ningún número finito podría describir adecuadamente una clase infinita. Si algún número de la aritmética común describe la cardinalidad de una clase, esa clase tiene que ser finita, aun cuando no haya suficiente tinta, espacio o tiempo para escribir dicho número. Necesitaremos pues, un tipo de número completamente nuevo, que no se encuentre en ninguna parte de la aritmética finita, para describir la cardinalidad de una clase infinita. Por consiguiente, se asignó la cardinalidad “aleph” a la totalidad de los números enteros. Sospechando que había otras clases infinitas, con cardinalidad mayor que la de la totalidad de los números enteros, su-



pusimos toda una jerarquía de alephs de la cual designamos con aleph-cero al número cardinal que representa la totalidad de los números enteros, con lo que se quiso indicar que era el más pequeño de los transfinitos.

Después de este inciso, a modo de resumen, volvamos una vez más a escudriñar los "alephs" para ver si, con un conocimiento más íntimo, resultan más fáciles de comprender.

La aritmética de los alephs tiene poca semejanza con la de los números enteros finitos. El osado comportamiento de  $\aleph_0$  es típico.

Un simple problema de suma se presenta así:

$$\begin{aligned}\aleph_0 + 1 &= \aleph_0 \\ \aleph_0 + \text{gügol} &= \aleph_0 \\ \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0\end{aligned}$$

La tabla de multiplicar sería fácil de enseñar, pero más fácil aún de aprender:

$$\begin{aligned}1 \times \aleph_0 &= \aleph_0 \\ 2 \times \aleph_0 &= \aleph_0 \\ 3 \times \aleph_0 &= \aleph_0 \\ n \times \aleph_0 &= \aleph_0\end{aligned}$$

En la cual  $n$  representa un número finito cualquiera.

Asimismo,

$$\begin{aligned}(\aleph_0)^2 &= \aleph_0 \times \aleph_0 \\ &= \aleph_0\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$(\aleph_0)^n = \aleph_0$$

donde  $n$  es un número natural finito.

Parece que no hubiera variación en el tema: la monotonía parece inevitable. Pero todo es muy engañoso y traicionero. Seguimos adelante obteniendo el mismo resultado a pesar de todo lo que hagamos con  $\aleph_0$ , cuando de repente probamos:

$$(\aleph_0)^{\aleph_0}$$

Esta operación crea, al fin, un nuevo transfinito. Pero antes de considerarlo hay que decir algo más sobre las clases numerables.

El sentido común nos dice que hay muchas más fracciones que números enteros, puesto que entre dos enteros cualesquiera hay un número infinito de fracciones. Pero, ¡ay!, el sentido común ha de ser descartado en el país del infinito. Cantor descubrió una demostración tan sencilla como elegante, según la cual las fracciones racionales forman una sucesión numerablemente infinita, equivalente a la clase de los números naturales. Por consiguiente, esta sucesión debe tener la misma cardinalidad que éstos\*.

Se dispone el conjunto de todas las fracciones racionales, no en el orden de valores crecientes, sino en el orden de los numeradores y denominadores ascendentes, en una tabla como la de la figura 12.

Ya que cada fracción puede escribirse como un par de números enteros, es decir,  $3/4$  como  $(3, 4)$ , puede efectuarse la ya muy conocida correspondencia uno a uno con los nú-

\* Se nos ha sugerido que al llegar aquí, el lector, cansado, cierra el libro con un suspiro —y se va al cine. Sólo podemos adelantarle, para calmarlo, que esta demostración, como la que sigue sobre la no numerabilidad de los números reales, es difícil. Usted puede rechinar los dientes y tratar de entender lo que pueda de ellas, o bien prescindir de ambas. Lo esencial, antes de retirarse, es saber que Cantor descubrió que las fracciones racionales son numerables, pero que el conjunto de los números reales no lo es. De este modo, y a pesar de lo que le dicte el sentido común, no hay más fracciones que números enteros, y hay más números reales entre 0 y 1, que elementos en toda la clase de los números enteros.



meros naturales tal como se indica mediante flechas en la figura 12 que antecede.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕ ...
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(2,3)

Cantor también descubrió, mediante una demostración (que no tratamos aquí por ser demasiado técnica) basada en el grado de las ecuaciones algebraicas, que el conjunto de todos los números algebraicos, números que son soluciones de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

es numerablemente infinito.

Pero Cantor intuyó que había otros transfinitos, que había clases que no eran numerables, clases que no podían ponerse en correspondencia biyectiva con los números enteros. Y uno de sus mayores triunfos tuvo lugar cuando demostró que hay clases que poseen una cardinalidad mayor que  $\aleph_0$ .

La clase de los números reales, compuesta de los números racionales e irracionales\*, es una de ellas. Contiene a aquellos irracionales que son algebraicos, así como a los que no lo son. Estos últimos se denominan *números trascendentes*<sup>5</sup>.

En la época de Cantor se conocían dos importantes números trascendentes:  $\pi$ , la relación de la circunferencia de un círculo con respecto a su diámetro, y  $e$ , la base de los loga-

\* Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracciones racionales. Por ejemplo  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $e$ ,  $\pi$ . La clase de los números reales está formada de racionales como 1, 2, 3,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{17}{32}$ , e irracionales como los arriba indicados

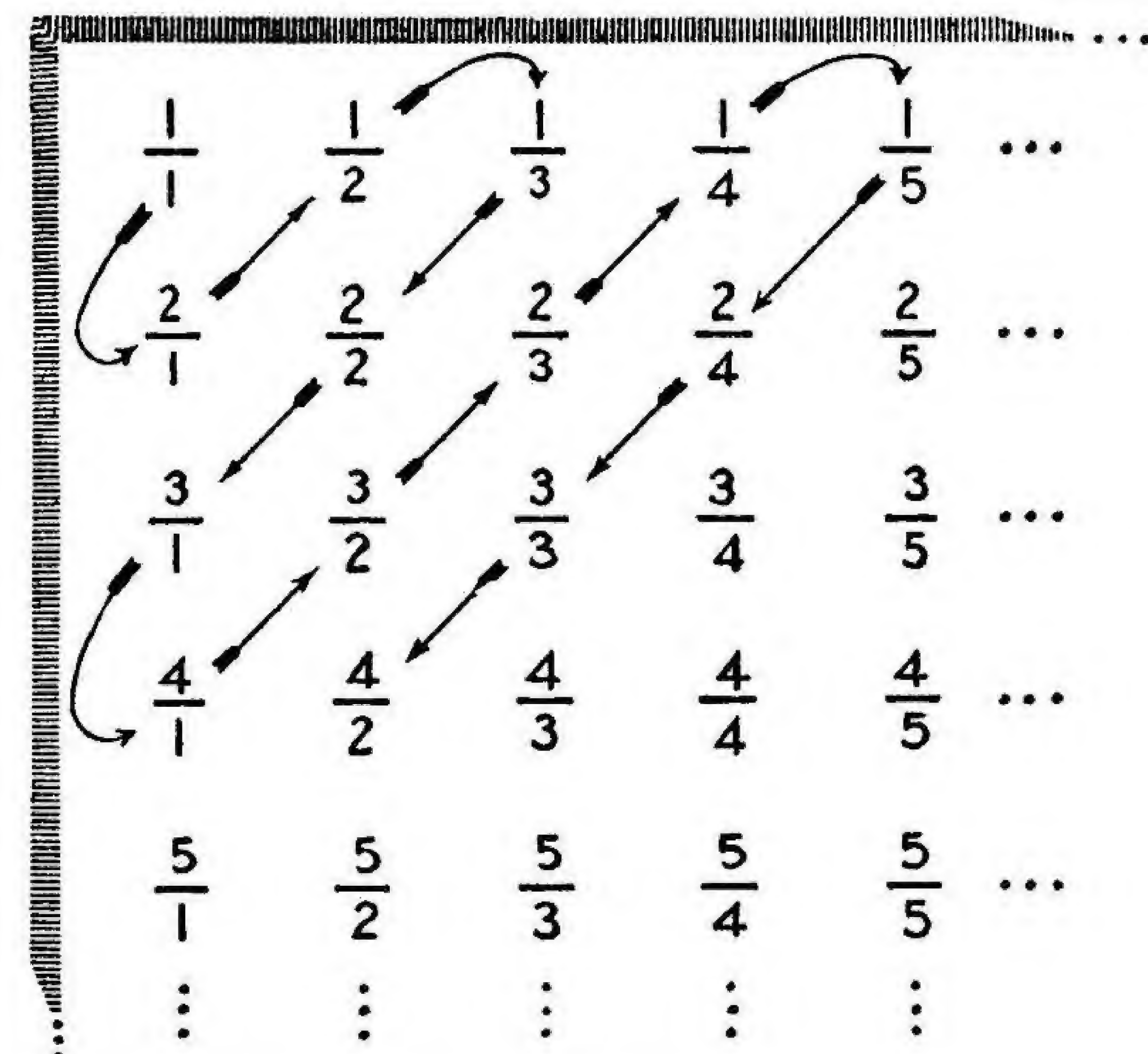


Fig. 12. Método diagonal de Cantor.

ritmos naturales. Muy poco más se sabía acerca de la clase de los trascendentes: era un verdadero enigma. Cantor tenía que probar, a fin de demostrar que la clase de los números reales era no numerable (es decir, demasiado grande para poderse contar con la clase de los números enteros), el hecho improbable de que la clase de los trascendentes era no numerable. Ya que se sabía que los números racionales y algebraicos eran numerables y que la unión de cualquier colección numerable de clases numerables es también una clase numerable, la única clase restante que podía hacer que la



totalidad de los números reales fuese no numerable era, por lo tanto, la clase de los trascendentes.

Cantor pudo idear semejante demostración. Si puede demostrarse que la clase de los números reales, comprendidos entre 0 y 1, es no numerable, se deducirá, *a fortiori*, que todos los números reales son no numerables. Empleando un recurso, usado muy a menudo en las matemáticas superiores, la *reductio ad absurdum*, Cantor supuso que era verdadero lo que sospechaba que era falso y entonces demostró que su suposición lo conducía a una contradicción. Supuso que los números reales comprendidos entre 0 y 1 eran numerables y podían, por lo tanto, ser biunívocamente emparejados con los números naturales. Habiendo probado que esta hipótesis lo llevaba a una contradicción, dedujo que su opuesta, a saber, que los números reales no podían ser emparejados con los números naturales (y, por lo tanto, formaban un conjunto no numerable) era verdadera.

Para poder numerar los números reales comprendidos entre 0 y 1 se requiere que todos ellos sean expresables de modo uniforme, y además, inventar un método para escribirlos en orden, de modo que se puedan ser, uno a uno, biunívocamente emparejados con los números naturales. El primer requisito puede cumplirse, ya que todo número real puede expresarse mediante un número decimal de infinitas cifras. Así, por ejemplo<sup>6</sup>:

$$\frac{1}{3} = 0,3333...$$
$$\frac{1}{9} = 0,1111111...$$

$$\frac{3}{14} = 0,21428571428571...$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414...}{2} = 0,707...$$

Pero se nos plantea ahora la segunda dificultad. ¿Cómo definir el emparejamiento? ¿Qué sistema podríamos idear,

que garantice que *todos los números decimales* figuren en el emparejamiento? Hemos estudiado ya un método para asegurar la presencia en él de todas las fracciones racionales. Por supuesto que no podríamos escribirlas material y físicamente a todas, como tampoco podríamos escribir la totalidad de los números naturales; pero el método de ir aumentando los numeradores y denominadores es tan explícito, que si dispusiéramos de tiempo infinito para ello, escribiríamos realmente todas las fracciones, con la seguridad de no haber omitido ninguna. Dicho de otro modo, siempre sería cierto y concluyente, que tras haber casado una fracción con un número natural, siempre sabríamos cuál sería la próxima fracción, y la siguiente, y la próxima, y así indefinidamente.

Por otra parte, si suponemos un número real, expresado en forma de número decimal de infinitas cifras, emparejado con un determinado número natural, ¿qué método habría para determinar cuál será, en el orden de la sucesión natural, el próximo número real a emparejar? Es suficiente preguntarse cuál será el *primero* de estos decimales infinitos, el que debe emparejarse con el número natural 1, para vislumbrar la dificultad del problema. Lo que hizo Cantor fue *suponer* que tal emparejamiento existía, sin tratar de dar su forma explícita. He aquí su plan: asociar al número 1 el decimal 0,*a*<sub>1</sub>*a*<sub>2</sub>*a*<sub>3</sub>...; con el número 2, el decimal 0,*b*<sub>1</sub>*b*<sub>2</sub>*b*<sub>3</sub>..., etc. Cada una de estas letras subindiciadas representa un dígito del número decimal en que interviene. La tabla de emparejamientos entre números naturales y decimales infinitos sería así:

1	↔	0, <i>a</i> <sub>1</sub>	<i>a</i> <sub>2</sub>	<i>a</i> <sub>3</sub>	<i>a</i> <sub>4</sub>	<i>a</i> <sub>5</sub> ...
2	↔	0, <i>b</i> <sub>1</sub>	<i>b</i> <sub>2</sub>	<i>b</i> <sub>3</sub>	<i>b</i> <sub>4</sub>	<i>b</i> <sub>5</sub> ...
3	↔	0, <i>c</i> <sub>1</sub>	<i>c</i> <sub>2</sub>	<i>c</i> <sub>3</sub>	<i>c</i> <sub>4</sub>	<i>c</i> <sub>5</sub> ...
4	↔	0, <i>d</i> <sub>1</sub>	<i>d</i> <sub>2</sub>	<i>d</i> <sub>3</sub>	<i>d</i> <sub>4</sub>	<i>d</i> <sub>5</sub> ...
.		.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.
.		.	.	.	.	.



Ésta era la tabla de Cantor. En seguida se hizo evidente que mostraba, y de forma notoria, la contradicción misma que Cantor había estado buscando. Y en esta derrota radica su triunfo, pues indiferentemente de cómo estén dispuestos los decimales, cualquiera que sea el sistema de ordenación adoptado, siempre será posible construir infinitos más que no figuren en la tabla. Vale la pena repetir este punto: habiendo ideado una tabla, en la creencia de que la misma contendría a todos y cada uno de los números decimales comprendidos entre 0 y 1, descubrimos que a pesar de todos nuestros esfuerzos siempre hay decimales que han sido omitidos. Cantor demostró que así sucede mediante su famoso "método diagonal". Las condiciones que permiten construir un decimal que no figure en la tabla son sencillas: haremos que difiera del primer decimal de la tabla en la primera cifra; del segundo, en la segunda; del tercero, en la tercera; y así sucesivamente. Pero entonces, tal decimal *difierá de cada uno de los decimales de toda la tabla*, al menos en una cifra. Si, como vemos en la figura, trazamos una diagonal en nuestra hipotética tabla, y escribimos un nuevo decimal, cada uno de cuyos dígitos difiera del correspondiente interceptado por la diagonal, el decimal así construido no podrá encontrarse en la tabla.

$$\begin{array}{l} 1 \longleftrightarrow 0, a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \dots \\ 2 \longleftrightarrow 0, b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \dots \\ 3 \longleftrightarrow 0, c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \dots \\ 4 \longleftrightarrow 0, d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \dots \\ 5 \longleftrightarrow 0, e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

El nuevo decimal puede escribirse así:

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

en el cual  $a_1$  difiere de  $a_1$ ,  $a_2$  difiere de  $b_2$ ,  $a_3$  de  $c_3$ ,  $a_4$  de  $d_4$ , etc. Por consiguiente, diferirá de cada decimal en una cifra por lo menos, y del enésimo decimal en, por lo menos, la enésima cifra. Esto prueba, en forma concluyente, que no hay manera alguna de incluir a todos los decimales en algún arreglo posible, que no existe modo alguno de aparearlos con los números enteros. Por lo tanto, como Cantor demostró:

1. La clase de los números trascendentes es, no sólo infinita, sino, además, no numerable.
2. El conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1 es infinito y no numerable.
3. *A fortiori*, la clase de todos los números reales es no numerable.

Cantor asignó un nuevo cardinal transfinito a la clase no numerable de los números reales. Fue uno de los alephs que hasta la fecha permanece sin resolver\*.

La aritmética de  $C$  es casi la misma que la de  $\aleph_0$ . La tabla de multiplicar tiene la misma cualidad monótona formal. Pero cuando  $C$  se combina con  $\aleph_0$ , lo absorbe por completo. Así:

$$\begin{array}{ll} C + \aleph_0 = C & C - \aleph_0 = C \\ C \times \aleph_0 = C & \text{y aun: } C \times C = C \end{array}$$

\* He aquí, brevemente expuesta, la situación. Está demostrado que la llamada "potencia del continuo",  $C$ , que es el cardinal del conjunto de números reales, es mayor que  $\aleph_0$ , según acabamos de ver. El propio Cantor demostró que  $C = 2^{\aleph_0}$ , donde  $2^{\aleph_0}$  es el cardinal de la clase compuesta por todos los subconjuntos de los números naturales. Cantor se esforzó largo tiempo en demostrar que no existe entre  $\aleph_0$  y  $C$  ningún cardinal intermedio, esto es, que hay un número transfinito inmediatamente consecutivo a  $\aleph_0$ , y que este número,  $\aleph_1$ , es  $C$ . Ahora sabemos, gracias a trabajos de Kurt Gödel y Paul Cohen, que tal conjetura es indecidible en el seno de la teoría de conjuntos estándar, incluso reforzada con el axioma de elección (*N del R*).



Por segunda vez esperamos una variación en el tema cuando recurrimos al proceso de elevar a una potencia. Sin embargo, por el momento quedamos defraudados, puesto que:  $C^{\aleph_0} = C$ . Pero así como  $(\aleph_0)^{\aleph_0}$  no es igual a  $\aleph_0$ , análogamente  $C^C$  no es igual a  $C$ .

Estamos ahora en condiciones de resolver nuestro anterior problema relacionado con la elevación a una potencia, pues, en realidad, Cantor encontró que  $(\aleph_0)^{\aleph_0} = C$ .

Análogamente  $C^C$  da origen a un nuevo transfinito, más grande que  $C$ . Este transfinito representa la cardinalidad de la clase de todas las funciones uniformes. Es también una de las  $\aleph$  pero como vimos anteriormente, una  $\aleph$  que es desconocida. Se la designa a menudo con la letra  $F^7$ . En general, el proceso de elevar a una potencia, al ser repetido, engendra transfinitos de orden superior.

Así como los números enteros servían de vara de medida para las clases de cardinalidad  $\aleph_0$ , la clase de los números reales sirve como patrón de medida para las clases de cardinalidad  $C$ . En efecto, hay clases de elementos geométricos que no pueden medirse de otra manera que con la clase de los números reales.

Dado que entre dos puntos cualesquiera hay siempre un tercero alineado con ellos, resulta que en todo segmento rectilíneo hay un número infinito de puntos. El conjunto de puntos de un segmento tiene por ello una propiedad llamada "densidad". En el caso que nos ocupa, ello significa que entre cualesquiera dos puntos de un conjunto lineal de puntos hay infinitos puntos del mismo conjunto. La propiedad de ser densos es una de las características esenciales de un continuo. Cantor al tratar la "cardinalidad del continuo", se dio cuenta de que es la misma para la clase de los números reales que para el conjunto de puntos de un segmento rectilíneo. Ambos son conjuntos densos, del mismo cardinal,  $C$ . En otras palabras, es posible emparejar biunívocamente los pun-

tos comprendidos en un segmento rectilíneo con los números reales.

Las clases de cardinalidad  $C$  poseen una propiedad similar a las clases de cardinalidad  $\aleph_0$ , pueden ser "entresacadas" sin afectar para nada a su cardinalidad. Con respecto a esto, vemos, de una manera muy sorprendente, otro ejemplo del principio de la aritmética transfinita, que el todo no es mayor que muchas de sus partes. Por ejemplo, puede demostrarse que hay tantos puntos en una línea de un metro de longitud como en otra de tres. El segmento  $AB$  de la figura 13 es tres veces más largo que la recta  $A'B'$ . Sin embargo, es posible poner el conjunto de todos los puntos del segmento  $AB$  en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos del segmento  $A'B'$ .

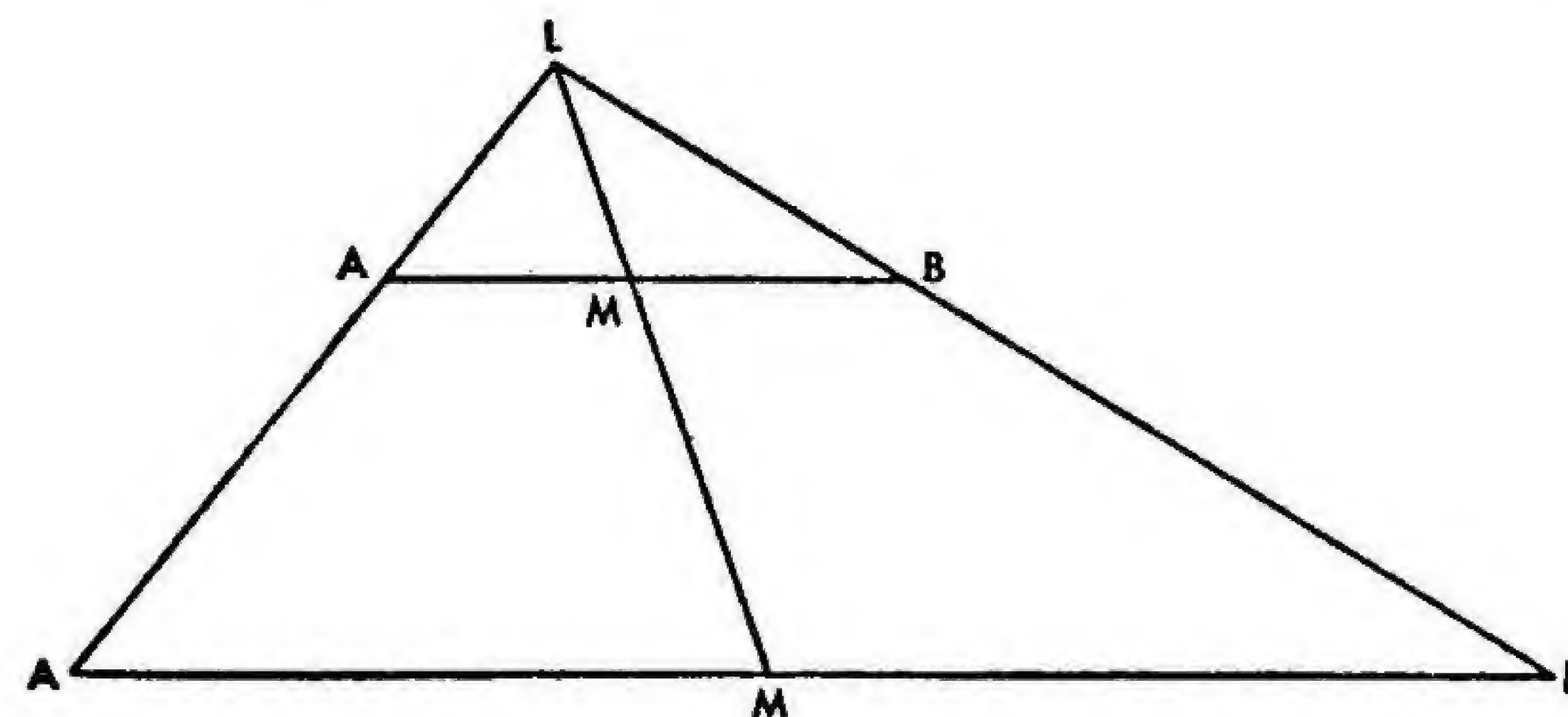


Fig. 13

Sea  $L$  la intersección de las rectas  $AA'$  y  $BB'$ . Si entonces a un punto  $M$  de  $AB$  le hacemos corresponder el punto  $M'$  de  $A'B'$ , perteneciente a la línea  $LM$ , habremos establecido la correspondencia deseada entre los conjuntos de puntos de  $A'B'$  y de  $AB$ . Es fácil ver intuitivamente, y demostrar geométricamente, que esto es siempre posible y que, por lo tan-



to, la cardinalidad de los dos conjuntos de puntos es la misma. Así pues, ya que  $A'B'$  es menor que  $AB$ , puede considerársela una porción de  $AB$ , y habremos establecido, una vez más, que una clase infinita, puede contener como partes propias, subclases que le son equivalentes.

Existen en geometría ejemplos más asombrosos que ilustran sobre la potencia del continuo. Aunque es suficientemente asombrosa la afirmación de que una línea de un centímetro de longitud contiene tantos puntos como otra trazada alrededor del Ecuador, o como la de una recta que vaya desde la Tierra hasta las más lejanas estrellas, es fantástico pensar que un segmento de recta de una millonésima de milímetro tiene tantos puntos como los que existen en todo el espacio tridimensional del Universo entero. Y sin embargo, esto es cierto. Una vez que se han entendido los principios de la teoría de los transfinitos de Cantor, dichas proposiciones dejan de parecer las extravagancias de un matemático loco. Las rarezas, como lo ha dicho Russell "no parecen entonces más extrañas que lo que parecían las personas antípodas, ya que en otros tiempos eran concebidos como imposible, porque se encontrarían muy molestas al tener que apoyarse sobre sus cabezas".

Aun concebiendo que el tratamiento del infinito sea una forma de locura matemática, uno se ve obligado a admitir, como lo hace el duque en *Medida por medida*:

*Si está loca —y no puedo creer otra cosa,  
su locura tiene el más extraño carácter de razón;  
sus palabras poseen un encadenamiento como  
no he conocido jamás en las palabras de la locura.*

Hasta ahora hemos eludido deliberadamente una definición de "clase infinita". Pero al fin nuestro instrumental nos habilita para hacerlo. Hemos visto que una clase infinita, ya

sea su cardinalidad,  $\aleph_0$ ,  $C$  o mayor, puede ser "entresacada" en una innumerable variedad de modos, sin afectar su cardinalidad. Más brevemente, el todo no es mayor que muchas de sus partes. Ahora bien, esta propiedad no la poseen, en modo alguno, las clases finitas; sólo pertenece a las clases infinitas. En consecuencia, es un método único para determinar si una clase es finita o infinita. Así, nuestra definición reza: *Una clase infinita es aquella que puede ponerse en una correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de sí misma.*

Provistos de esta definición y las pocas ideas que hemos recogido, podremos examinar nuevamente algunas de las paradojas de Zenón. La de Aquiles y la tortuga puede expresarse como sigue: Aquiles y la tortuga, por recorrer el mismo camino, habrán cada uno de ellos de ocupar el mismo número de posiciones distintas durante su carrera. Sin embargo, si Aquiles desea apresar a su pausada y voluntariosa competidora, tendrá que ocupar *más* posiciones que la tortuga, en el mismo período de tiempo transcurrido. Como que esto es manifiestamente imposible, usted podrá apostar su dinero a favor de la tortuga.

Pero no se precipite usted. Hay mejores maneras de gastar el dinero. En efecto, después de todo habría sido mejor apostar a favor de Aquiles porque él es el probable ganador de la carrera. Aun cuando podamos no haberlo comprendido, acabamos de probar que podía alcanzar a la tortuga al demostrar que una línea de una millonésima de milímetro tiene tantos puntos como una recta que se extienda desde la Tierra hasta la estrella más lejana. En otras palabras, los puntos del reducidísimo segmento rectilíneo pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los puntos de la recta grande, porque no hay relación entre el número de puntos de una línea y su longitud. Pero esto revela el error de pensar que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga. La proposición de



que Aquiles debe ocupar tantas posiciones distintas como la tortuga, es correcta. Asimismo lo es la que expresa que debe recorrer una distancia mayor que la tortuga en el mismo intervalo de tiempo. La única proposición incorrecta es la deducción de que ya que debe ocupar el mismo número de posiciones que la tortuga, no puede ir más lejos mientras así lo hace. Aun cuando los conjuntos de puntos de cada línea, que corresponden a las diversas posiciones tanto de Aquiles como de la tortuga, son equivalentes, la línea que representa la trayectoria de Aquiles es mucho más larga que la de la tortuga. Aquiles puede andar mucho más lejos que la tortuga sin tocar, sucesivamente, más puntos.

La solución de la paradoja de la flecha en vuelo, requiere una palabra acerca de otro tipo de continuo. Es conveniente, y por cierto habitual, considerar al tiempo como un continuo. El tiempo continuo tiene las mismas propiedades que el espacio continuo: Los instantes sucesivos de cualquier intervalo de tiempo transcurrido, al igual que los puntos de una línea, pueden ser puestos en una correspondencia uno a uno con la clase de los números reales; entre dos instantes cualesquiera pueden interpolarse una infinidad de otros; el tiempo tiene también la propiedad matemática antes mencionada, a saber, es denso.

El argumento de Zenón afirmaba que en cada instante la flecha estaba en alguna parte, en algún lugar o posición y, por lo tanto, no podía, en ningún instante, hallarse en movimiento. Aunque el enunciado de que la flecha tenía que estar, en cada momento, en algún lugar es cierto, la conclusión de que por lo tanto no podía estar moviéndose es absurda. Nuestra tendencia natural a aceptar este absurdo como verdad, nace de nuestra firme convicción de que el movimiento es completamente distinto del reposo.

No tenemos dudas sobre la posición de un cuerpo en reposo —tenemos la sensación de que no hay misterio alguno

en el estado de reposo. Deberíamos sentir lo mismo cuando consideramos un cuerpo en movimiento.

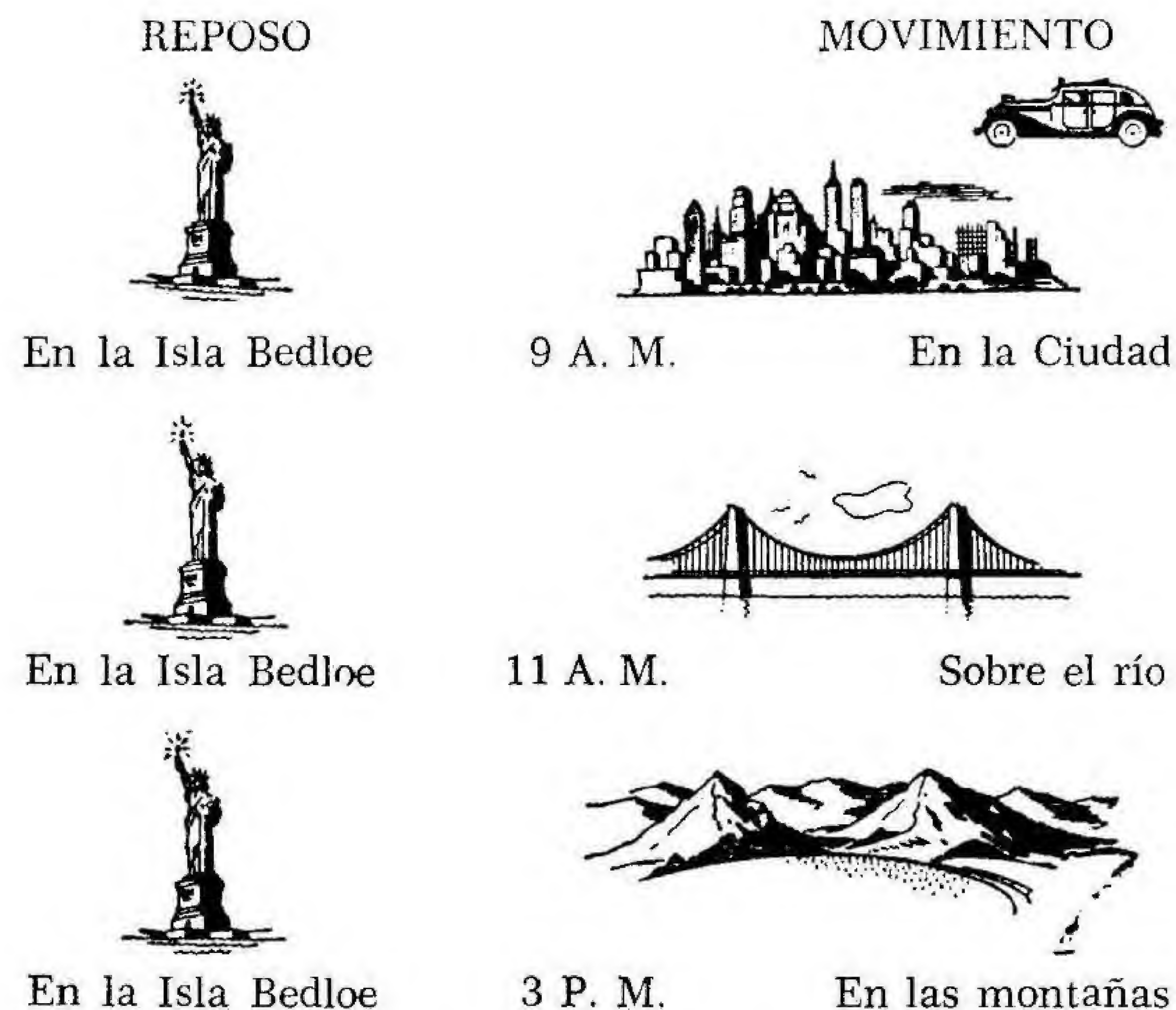
Cuando un cuerpo está en reposo, está en una posición en un instante y un instante después está todavía en la misma posición. Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento, existe una correspondencia uno a uno entre cada instante y cada nueva posición. A fin de aclarar estos conceptos podemos construir dos tablas: una de ellas describirá un cuerpo en reposo y la otra, un cuerpo en movimiento. La tabla de “reposo” expresará la historia y la geografía de la vida de la Estatua de la Libertad, mientras que la tabla del “movimiento” describirá la odisea de un automóvil.

Las tablas indican que a cada instante corresponde una posición de la Estatua de la Libertad y del taxi. Hay una correspondencia biunívoca entre espacio y tiempo tanto para el reposo como para el movimiento.

No encierra paradoja alguna el rompecabezas de la flecha cuando observamos nuestra tabla. En efecto, lo raro sería que hubiese en ella espacios vacíos; que fuese imposible, en cualquier instante, determinar exactamente cuál es la posición de la flecha.

Casi todos nosotros juraríamos que existe el movimiento, pero no estamos acostumbrados a considerarlo como algo que hace que un objeto ocupe posiciones distintas en diferentes instantes. Somos proclives a admitir que el movimiento dota a un objeto de la extraña facultad de hallarse continuamente en ninguna parte. Trabados por las limitaciones de nuestros sentidos, que nos impiden percibir que un objeto en movimiento ocupa simplemente una posición después de otra, al hacerlo rápidamente, alentamos una ilusión sobre la naturaleza del movimiento y la convertimos en un cuento de hadas. Las matemáticas nos ayudan a analizar y aclarar lo que percibimos hasta el punto en que nos vemos obligados a reconocer, si no deseamos dejarnos guiar más por cuentos





**Fig. 14.** En los tiempos indicados, la Estatua de la Libertad está en el punto señalado, mientras que los pasajeros del taxi contemplan los distintos paisajes de la derecha.

de hadas, que vivimos, ya sea en el mundo inmutable de Russell o en un mundo donde el reposo no es sino una forma de movimiento. La historia del movimiento es la misma que la del reposo. Es la misma historia contada con un "tempo" más rápido. La historia del reposo es "está aquí"; la del movimiento es: "está aquí, está allí". El hecho de que, en este sentido, se asemeje al espectro del padre de Hamlet, no es motivo para dudar de su existencia. La mayoría de nues-

tras creencias están ancladas a fantasmas menos sustanciales. Quizá no sea fácil para nuestros sentidos comprender el movimiento, pero, con ayuda de las matemáticas, puede entenderse correctamente su esencia.

Al comenzar el siglo XX se admitía, generalmente, que la obra de Cantor había aclarado el concepto del infinito de tal manera, que podía hablarse de él y tratarlo igual que a cualquier otro concepto matemático respetable. Pero las polémicas que se suscitan dondequiera se encuentren los filósofos matemáticos, ya sea por escrito o personalmente, demuestran que era ésta opinión equivocada. En sus términos más simples esta controversia, en lo tocante al infinito se centra en torno a las preguntas: "¿Existe el infinito?" "¿Hay algo semejante a una clase infinita?" Semejantes preguntas pueden tener poco significado, a menos que se explique antes la expresión "existencia" matemática.

En su famosa obra "Agony in Eight Fits", Lewis Carroll cazó el "snark"\*. Nadie tenía conocimiento del "snark" ni sabía casi nada de él, salvo que existía, y que era mejor mantenerse alejado de un "boojum"\*\*. El infinito también puede ser un "boojum", pero su existencia, en cualquier forma, es una cuestión de considerable duda. "Boojum" o variedad de jardín, el infinito, ciertamente, no existe en el mismo sentido en que decimos: "Hay peces en el mar." Al fin de cuentas la proposición: "Hay un número llamado 7" se refiere a algo que tiene una existencia diferente a la del pez en el mar. "Existencia", en la acepción matemática, es completamente

\* "Snark", palabra formada por la combinación de *snake* (culebra) y *shark* (tiburón), inventada por Lewis Carroll (Charles L. Dodgson) para designar a un animal absurdo que aparece en su poema *The Hunting of the Snark* (1876). Una de sus variedades se conoce como "boojum".

\*\* "Boojum", una especie de "snark", los cazadores del cual "desaparecen suave y silenciosamente". (Citas del Webster's New International Dictionary of the English Language.)



distinta de la existencia de objetos en el mundo físico. Una bola de billar puede tener como una de sus propiedades, en adición a su blancura, redondez, dureza, etc., una relación de perímetro a diámetro aproximada al número  $\pi$ . Estamos de acuerdo en que tanto la bola de billar como  $\pi$  existen, debemos también convenir en que la bola de billar y  $\pi$  llevan diferentes clases de vidas.

Ha habido tantas opiniones sobre el problema de la existencia, desde Euclides y Aristóteles, como filósofos. En épocas modernas las diversas escuelas de filosofía matemática, la escuela logística, formalistas, e intuicionistas, han discutido la poco menos que vidriosa esencia de la existencia matemática. Todas estas discusiones van más allá de nuestro saber, finalidad o intención. Una asociación más extraña aún que la tortuga, Aquiles y la flecha, ha defendido la existencia de las clases infinitas —defendido en el mismo sentido en que habrían defendido la existencia del número 7. Los formalistas, que piensan que las matemáticas son un juego sin sentido, pero que no por eso juegan con menos gusto, y la escuela logística, que considera que las matemáticas son una rama de la lógica —ambas se han puesto de parte de Cantor y han defendido los alephs. Su defensa se basa en la noción de autoconsistencia. “Existencia” es una expresión metafísica ligada con la noción de ser, y con otros espantajos peores aun que los “boojums”. Pero la expresión “proposición autoconsistente” suena como el lenguaje de la lógica y tiene su mismo aroma de santidad. Una proposición que no es contradictoria consigo misma es, de acuerdo a la escuela logística, un verdadero enunciado de existencia. Desde este punto de vista, la mayor parte de la obra matemática de Cantor sobre el infinito es inexpugnable.

Sin embargo, se han descubierto nuevos problemas y nuevas paradojas suscitadas en ciertas partes de la estructura de Cantor, debido a ciertas dificultades intrínsecas de la ló-

gica clásica. Se centran en torno al uso de la palabra “todo”. Las paradojas que se encuentran en la conversación ordinaria, tales como: “Todas las generalidades son falsas, incluso ésta” constituyen un verdadero problema en los fundamentos de la lógica, como lo fue la paradoja de Epiménides, de donde provienen. En ella, se hace decir a un cretense que todos los cretenses son embusteros, lo cual, si es cierto, convierte en mentiroso al que habla por decir la verdad. Para tratar este tipo de paradojas, la escuela logística inventó una “Teoría de Tipos”. La teoría de tipos y el axioma de reductibilidad, sobre el cual se basa, deben ser aceptados como axiomas a fin de evitar paradojas de esta clase. Para poder lograr esto se requiere una reforma de la lógica clásica, la cual, por otra parte, ya se ha emprendido. Como ocurre con la mayoría de las reformas, no es del todo satisfactoria —ni aun para los reformadores— pero mediante su teoría de tipos se ha eliminado el último vestigio de inconsistencia de la casa que Cantor construyó. La teoría de los transfinitos puede todavía ser absurda para muchos matemáticos, pero es, sin duda alguna, consistente. La grave acusación de Henri Poincaré, contenida en su aforismo: “La logistique n’est plus stérile; elle engendre la contradiction”, fue bien refutada por la doctrina logística en lo que atañe al infinito.

A los alephs de Cantor, pues, podemos atribuir la misma existencia que al número 7. Puede hacerse, con respecto a cualquiera de ellos, una proposición de existencia libre de contradicción en sí misma. En última instancia, no hay razón valedera para confiar más en lo finito que en lo infinito. Es tan permisible descartar al infinito como lo es el negar las impresiones de nuestros sentidos. No es ni más ni menos científico proceder así. En último análisis, esto es una cuestión de fe y discernimiento, pero no es comparable a creer o no en los Reyes Magos. Las clases infinitas, al ser juzgadas por normas finitas, engendran paradojas mucho más absurdas y mu-



chísimo menos agradables que la creencia en los Reyes Magos, pero cuando se las juzga con normas adecuadas pierden su rara apariencia y se comportan en una forma tan predecible como cualquier número entero finito.

Al final, en su propio escenario, el infinito ha asumido una posición respetable al lado del finito, tan real y tan segura como la de éste, si bien enteramente distinta en carácter. Sea lo que fuere el infinito, ha dejado de ser una vaca color púrpura.

#### NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1 Distinguimos a los números cardinales de los números *ordinales*, ya que éstos denotan la relación de un elemento en una clase con respecto a los otros, con referencia a un sistema de orden. Así hablamos del *primer* Faraón de Egipto, o del *cuarto* número entero en su orden usual, o del *tercer* día de la semana, etc. Éstos son ejemplos de ordinales. Página 31.

2 Para la definición de los números primos, véase el capítulo sobre Pie. Página 33.

3 Se dice que esta serie *converge a un límite*. 1. La discusión de este concepto debemos posponerla para tratarla en los capítulos sobre Pie y el cálculo. Página 38.

4 Puede verse un excelente artículo sobre Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos en el número de agosto de 1983 de la revista Investigación y Ciencia. (*N. del R.*)

5 Un número trascendente es aquel que no es la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros. Véase Pie. Página 50.

6 Cualquier decimal como 0,4 tiene la forma de fracción decimal infinita: 0,3999... Página 52.

7 Una interpretación geométrica sencilla de la clase de todas las funciones uniformes  $F$ , es la siguiente: Con cada punto de un segmento de recta, asóciase un color del espectro. La clase  $F$  estará entonces compuesta de todas las combinaciones posibles de colores y puntos que puedan concebirse. Página 56.

### III. PIE ( $\pi$ , $i$ , $e$ ): TRASCENDENTES E IMAGINARIOS

*A fin de alcanzar la Verdad, es necesario, una vez en la vida, poner todo en duda —hasta donde sea posible.*

DESCARTES

Tal vez la ciencia pura comience donde termina el sentido común; acaso, como dice Bergson: "La inteligencia se caracteriza por una falta natural de comprensión de la vida<sup>1</sup>." Pero ni tenemos que predicar paradojas, ni que convencer con epigramas. Lo que ocurre es que el estudio de la ciencia, particularmente las matemáticas, lleva a menudo a la conclusión de que basta decir que una cosa es increíble o imposible, para que la ciencia le demuestre que está equivocado. Para el buen sentido común resulta natural que la Tierra sea plana y que esté inmóvil, que los chinos y los antípodas caminen suspendidos por los pies como las arañas de luces, que las rectas paralelas nunca se encuentren, que el espacio sea infinito, que los números negativos sean tan poco reales como las vacas negativas, que  $-1$  no tenga raíz cuadrada, que una serie infinita debe tener una suma infinita, o que debe ser posible, con regla y compás únicamente, construir un cuadrado cuya superficie sea exactamente igual a la de un círculo dado.

Pero, ¿hasta dónde hemos sido conducidos por el sentido



común para llegar a estas conclusiones: «No muy lejos! Y sin embargo, algunas de esas proposiciones parecen enteramente plausibles, más aún, irreprochables. Sería erróneo afirmar que la ciencia ha demostrado que todas son falsas. Podemos todavía adherirnos a la hipótesis euclidiana de que las rectas paralelas nunca se encuentran y que permanecen siempre equidistantes, mientras recordemos que se trata solamente de una hipótesis, pero las proposiciones acerca de la cuadratura del círculo, la raíz cuadrada de  $-1$  y las referentes a las series infinitas, pertenecen a una categoría distinta.

El círculo *no puede* ser convertido en un cuadrado equivalente utilizando sólo regla y compás.  $-1$  *tiene* raíz cuadrada. Una serie infinita *puede* tener una suma finita. Tres símbolos:  $\pi$ ,  $i$ ,  $e$ , han permitido a los matemáticos demostrar estas proposiciones, tres símbolos que representan los frutos de siglos de investigación matemática. ¿Hasta qué punto se ajustan al sentido común?

El problema más famoso en toda la historia de las matemáticas es la “cuadratura del círculo”. Otros dos problemas que desafiaron a los geómetras griegos, la “duplicación del cubo” y la “trisección del ángulo” pueden ser sucintamente examinados junto con el primero, como temas de interés, aun cuando sólo en la cuadratura del círculo interviene  $\pi$ .

En la infancia de la geometría se descubrió que era posible medir la superficie de una figura limitada por líneas rectas. En realidad, la geometría fue ideada con esa misma finalidad, medir los campos del valle del Nilo, donde cada año las inundaciones provocadas por las crecidas del río arrasaban todas las marcas puestas por el agricultor para delimitar sus campos de los de sus vecinos. La medición de áreas limitadas por líneas curvas presentaba mayores dificultades, y se empeñaron en reducir cada problema de este tipo a uno

de medir superficies con lindes rectas. Evidentemente, si puede construirse un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, midiendo el área del cuadrado, queda determinada la del círculo. La expresión “cuadratura del círculo” procede de esta tentativa de solución.

El número  $\pi$ , es la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. El área de un círculo de radio  $r$  está dada por la fórmula:  $\pi r^2$ . Ahora bien, el área de un cuadrado cuyo lado mide  $A$ , es  $A^2$ . De este modo la expresión algebraica  $A^2 = \pi r^2$  indica la equivalencia de área entre un cuadrado y un círculo dados. Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de esta ecuación, se obtiene:  $A = r \sqrt{\pi}$ . Como  $r$  es una cantidad conocida, el problema de la cuadratura del círculo queda reducido, en efecto, el cálculo del valor de  $\pi$ <sup>(2)</sup>.

Puesto que los matemáticos han logrado calcular  $\pi$  con extraordinaria exactitud, ¿qué significa entonces la proposición: “Es imposible convertir un círculo en un cuadrado equivalente?” Desgraciadamente este asunto suscita muchos conceptos erróneos que desaparecerían si el problema fuese comprendido.

Se proclama que la cuadratura del círculo es *imposible*; pero, ¿qué significa “imposible” en matemáticas? El primer buque a vapor que cruzó el Atlántico, llevaba, entre su cargamento, un libro que “demostraba” que era imposible, para un buque a vapor, cruzar nada, y mucho menos el Atlántico. La mayor parte de los sabios de hace algunas generaciones “demostraron” que sería siempre imposible inventar una máquina voladora más pesada que el aire. El filósofo francés Augusto Comte, demostró que sería siempre imposible, para la mente humana, descubrir la composición química de las estrellas. Sin embargo, poco tiempo después de hecha esta afirmación, se aplicó el espectroscopio para analizar la luz



proveniente de las estrellas y hoy sabemos más acerca de su composición química, incluidas las estrellas pertenecientes a las nebulosas más distantes, de lo que sabemos del contenido de nuestro botiquín. Como ilustración, diremos que el helio fue descubierto en el Sol antes de serlo en la Tierra.

Los museos y las oficinas de patentes están atestadas de cañones, relojes y desmotadoras de algodón, ya anticuados, cada uno de los cuales dio por tierra con predicciones de que su invención era imposible. Un hombre de ciencia que afirma que una máquina o un proyecto es imposible, sólo revela las limitaciones de su época. Cualesquiera que sean las intenciones del profeta, su predicción no tiene ninguna de las cualidades de la profecía. "Es imposible volar hasta las estrellas" es un sinsentido, mientras que "aún no hemos inventado un medio para volar hasta las estrellas" sí lo tiene.

Las proposiciones acerca de la imposibilidad en matemáticas son de un carácter completamente distinto. Un problema en matemáticas que no podrá ser resuelto en los siglos venideros no siempre es imposible. "Imposible", en matemáticas, significa *teóricamente* imposible y no tiene nada que ver con el estado actual de nuestros conocimientos. "Imposible", en matemáticas *no* caracteriza al proceso de hacer una bolsa de seda de la oreja de una puerca, o una oreja de puerca de una bolsa de seda; sí caracteriza la tentativa de demostrar que 7 por 6 es igual a 43 (a pesar de que las personas que flojean en aritmética logran, a menudo, lo imposible). Por las reglas de la aritmética, 7 por 6 es igual a 42, así como, de acuerdo a las reglas del ajedrez un peón debe efectuar, por lo menos, 5 movimientos antes de que pueda ser convertido en reina.

Cuando se carece de demostración teórica de que un problema no puede ser resuelto, es legítimo buscar una solución, no importa cuán improbable sea la esperanza de buen éxito. Durante siglos la construcción de un polígono re-

gular de 17 lados fue correctamente considerada difícil, falsamente considerada imposible, por cuanto Gauss, a los diecinueve años de edad, en 1796, logró hallar una construcción elemental<sup>2</sup>. Por otra parte, muchos problemas famosos, tales como el último teorema de Fermat<sup>3</sup>, han desafiado toda solución hasta la fecha, a pesar de heroicas investigaciones. Para determinar si tenemos derecho a decir que la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo son *imposibles*, debemos encontrar demostraciones lógicas, basadas en un razonamiento puramente matemático. Una vez que se han aducido dichas pruebas, continuar buscando una solución equivale a cazar un bípedo de tres pies<sup>5</sup>.

Habiendo determinado lo que los matemáticos entienden por imposible, el simple enunciado "es imposible convertir el círculo en un cuadrado equivalente", queda todavía sin sentido. Para dárselo, debemos especificar *cómo* debe ser convertido el círculo en un cuadrado equivalente. Cuando Arquímedes dijo: "Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra" no estaba haciendo alarde de su fuerza física, sino que estaba enaltecendo el principio de la palanca. Cuando se dice que un círculo no puede ser convertido en un cuadrado equivalente, todo lo que ello significa es que esto *no puede hacerse con regla y compás solamente*, aunque la operación llegue a ser posible con ayuda de un integrador gráfico o mediante curvas de grado superior a dos.

Repitamos el problema: Se pide construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, mediante un dibujo teóricamente exacto, usando únicamente dos instrumentos: la regla y el compás. Se entiende por regla el sencillo instrumento conocido para trazar una línea recta, no para medir longitudes. Por compás entendemos un instrumento con el cual se puede dibujar un círculo, con cualquier centro y cual-



quier radio. Ambos instrumentos deben usarse un número finito de veces a fin de no tener que recurrir a procesos de límites o de convergencia que requieran un número infinito de pasos<sup>6</sup>. La construcción, de razonamiento puramente lógico y fundada tan sólo en los axiomas y teoremas de Euclides, debe ser absolutamente exacta.

Los conceptos de “límite” y “convergencia” serán explicados con más detalles más adelante<sup>7</sup>, pero conviene aquí que nos refiramos brevemente a ellos.

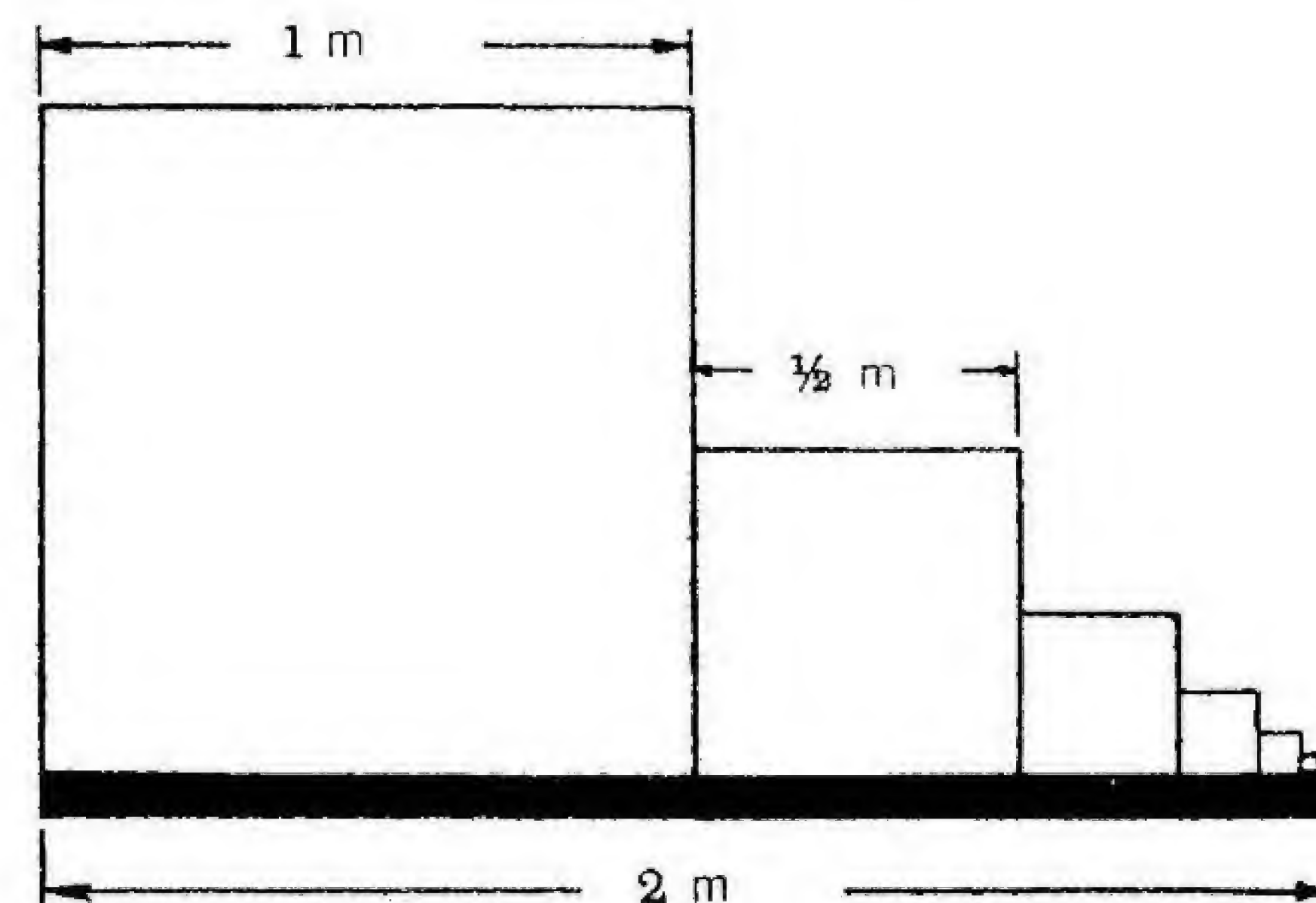
Consideremos la ya conocida serie:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ . La suma de los 5 primeros términos de

esta serie es 1,9375; la suma de los primeros 10 términos es 1,9980...; para los primeros 15 términos su suma da: 1,999781... Se ve claramente que esta serie tiende a “redondearse”; es decir, los términos adicionales que se le agregan se hacen tan pequeños que aun un número inmenso de ellos no logrará hacer que la serie crezca más allá de una cota finita. En este caso la cota o límite es 2. Una serie semejante se dice que “converge” a un “límite”<sup>8</sup>.

Las analogías geométricas de los conceptos de límite y convergencia son igualmente provechosas. Un círculo puede ser considerado como el límite de los polígonos con un número creciente de lados que pueden inscribirse sucesivamente en él, o circunscribirse alrededor de él y su área como el límite común de estos dos conjuntos de polígonos.

Ésta no es una definición rigurosa de límite y convergencia, pero a menudo el rigor matemático sólo sirve para provocar otra clase de rigor —el *rigor mortis* de la creación matemática.

Volviendo a la cuadratura del círculo: los griegos, y los matemáticos que los sucedieron, buscaron una construcción exacta con regla y compás, pero siempre fracasaron. Como



**Fig. 15.** Un número infinito de términos con una suma finita. Si el ancho del primer tramo es un metro, el del segundo 1/2 metro, el del tercero 1/4 de metro, el cuarto 1/8 de metro, y así sucesivamente, cabe un número infinito de tramos, que guardan entre sí esa relación, en la varilla de dos metros de longitud, es decir:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

veremos luego, todas las construcciones en que intervienen la regla y el compás son equivalentes geométricos de ecuaciones *algebraicas* de primero y segundo grado y de combinaciones de tales ecuaciones. Pero el matemático alemán Lindemann, en el año 1882, demostró que  $\pi$  es un número *trascendente* y, de este modo, cualquier ecuación de coeficientes enteros a la que satisfaga no puede ser algebraica, y mucho menos algebraica de primero o de segundo grado. De ello se deduce que el enunciado: “La cuadratura del círculo es imposible con regla y compás solamente” es una expresión plena de sentido.



En lo que se refiere a los otros dos problemas, gracias en parte a la obra de “ese maravilloso muchacho... que murió en plena juventud”, el joven Galois, de dieciséis años de edad, se estableció, hace aproximadamente cien años, que la duplicación del cubo y la trisección del ángulo son también imposibles con regla y compás. Daremos de ellos una sucinta referencia.

Existe una leyenda entre los griegos, según la cual el problema de la duplicación del cubo se originó en una visita al Oráculo de Delfos. En esa época había una fuerte epidemia y el oráculo anunció que la misma cesaría únicamente si se duplicaba en tamaño un altar cúbico dedicado a Apolo. Los albañiles y arquitectos cometieron el error de *duplicar* la arista del cubo, con lo cual el volumen resultó ocho veces mayor. Por supuesto, el oráculo no quedó satisfecho y los matemáticos griegos, al examinar nuevamente el problema, comprendieron que la solución correcta implicaba, no la duplicación del lado, sino su multiplicación por la raíz cúbica de 2. Pero esto no podía resolverse geométricamente con regla y compás, y sólo finalmente culminaron la tarea con éxito empleando otros instrumentos y curvas de grado superior. El oráculo fue aplacado y la epidemia cesó. Se podrá creer la leyenda o no, como se prefiera, pero no es posible “duplicar el cubo”<sup>9</sup>.

La trisección del ángulo ha recibido mucha atención en los últimos años, porque continúan aflorando monografías que pretenden resolver el problema por completo. Las falacias contenidas en estas “soluciones” son de cuatro clases: algunas veces son solamente aproximadas y no exactas; de vez en cuando se usan otros instrumentos además de la regla y el compás, ya sea a sabiendas o inconscientemente; a veces hay un sofisma lógico en la demostración que se intenta y a menudo se consideran únicamente ángulos especiales y no generales. Un ángulo puede ser bisecado pero no trisecado

por los medios que proporciona la geometría elemental, ya que el primer problema implica simplemente raíces cuadradas, mientras que el segundo se resuelve con raíces cúbicas las que, como hemos visto, no pueden construirse con regla y compás.

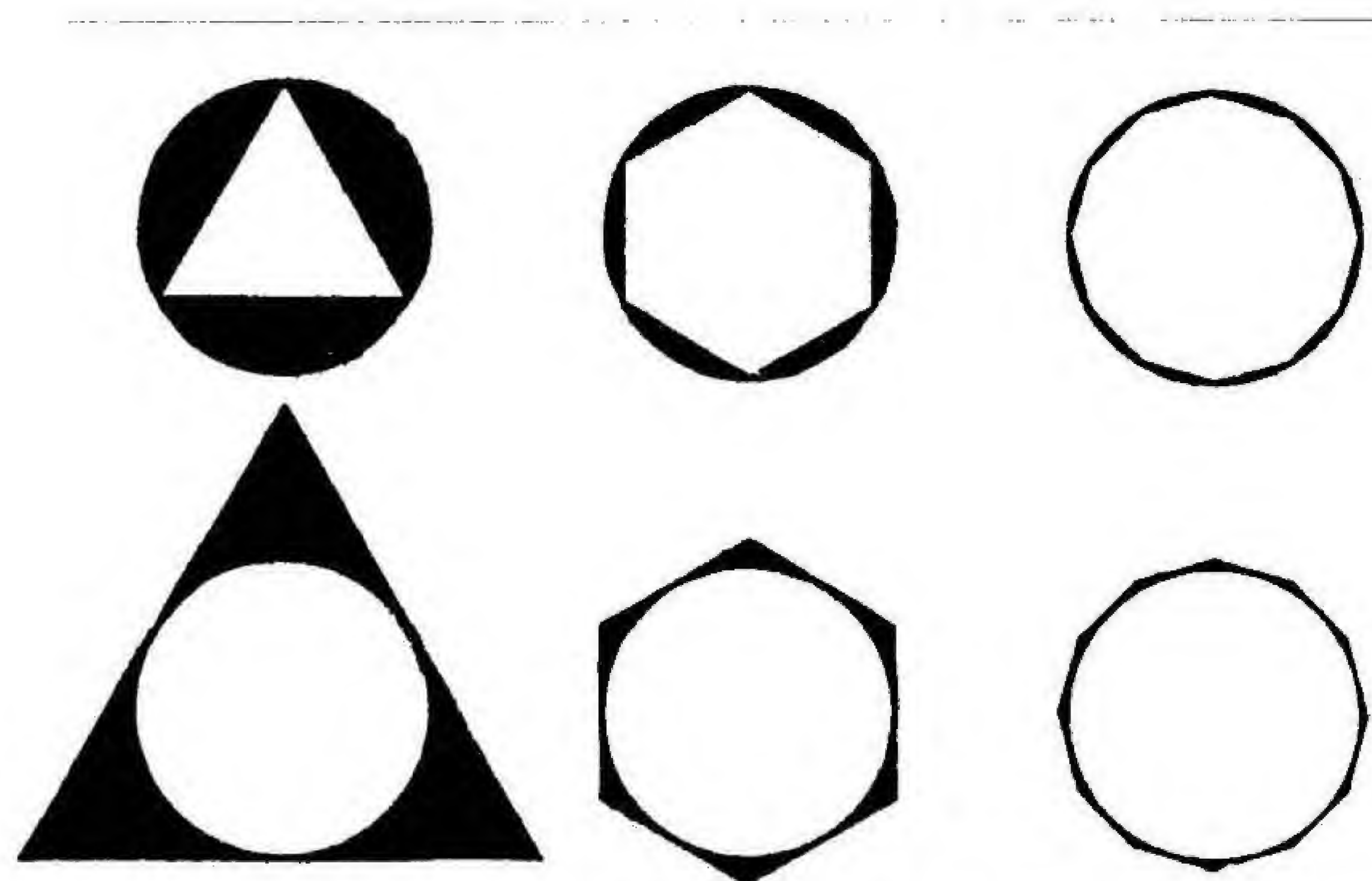
La dificultad para cuadrar el círculo, como se dijo al principio, radica en la naturaleza del número  $\pi$ . Este notable número, como demostró Lindemann, no puede ser raíz de una ecuación algebraica de coeficientes enteros<sup>10</sup>. No es expresable, por lo tanto, mediante operaciones racionales o por la extracción de raíces cuadradas, y como sólo estas operaciones admiten una construcción equivalente hecha con regla y compás, es imposible cuadrar el círculo. La parábola es una curva más complicada que la circunferencia, pero, sin embargo, como ya sabía Arquímedes, cualquier área limitada por una parábola y una línea recta puede determinarse mediante operaciones racionales y, en consecuencia, la “parábola puede ser convertida en un cuadrado equivalente”.

La demostración de Lindemann es demasiado técnica para ocuparnos de ella aquí. Sin embargo, si consideramos la historia y el desarrollo de  $\pi$ , estaremos en mejores condiciones para comprender su finalidad, sin estar obligados a conocer a fondo sus dificultades.

Si se *inscribe* un triángulo en un círculo (fig. 16), el área del triángulo inscrito será menor que el área del círculo.

La diferencia entre el área del círculo y la del triángulo es igual a las tres partes sombreadas del círculo. Consideremos ahora el mismo círculo con un triángulo *circunscrito* a su alrededor (fig. 16). El área del triángulo circunscrito será mayor que el área del círculo. Las tres partes sombreadas del triángulo representan, nuevamente, la diferencia en área. Se verá fácilmente que si se duplica el número de lados de la figura





**Fig. 16.** El círculo como límite de polígonos inscritos y circunscritos.

inscrita, el área del hexágono resultante será menor que el área del círculo, pero se le aproximará más que el área del triángulo inscrito. Análogamente, si se duplica el número de lados del triángulo circunscrito, el área del hexágono circunscrito seguirá siendo mayor que el área del círculo, pero, nuevamente, se acercará más a su superficie que el triángulo circunscrito.

Por métodos geométricos, simples y muy conocidos, empleando solamente regla y compás, puede duplicarse, tantas veces como se quiera, el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos. El área de los polígonos sucesivamente inscritos se aproximará a la del círculo, pero siempre quedará *ligeramente menor*; el área de los polígonos circunscritos se aproximará también a la del círculo, pero su superficie permanecerá siempre *ligeramente mayor*. El valor co-

mún al que se aproximan ambas es el área del círculo. En otras palabras, el círculo es el *límite* de estas dos sucesiones de polígonos. Si el radio del círculo es igual a 1, su área, dada por  $\pi r^2$ , es simplemente igual a  $\pi$ .

Este método de ir aumentando el número de lados de los polígonos, empleado para calcular el valor de  $\pi$ , ya era conocido por Arquímedes, quien, mediante polígonos de 96 lados, demostró que  $\pi$  es menor que  $3 \frac{1}{7}$  y mayor que  $3 \frac{10}{71}$ .

En alguna parte, entre ambos, se encuentra el área del círculo.

La aproximación dada para  $\pi$  por Arquímedes es considerablemente más perfecta que la dada por la Biblia. En el Libro de los Reyes y en las Crónicas, se asigna a  $\pi$  el valor de 3. Los matemáticos egipcios dieron un valor algo más aproximado: 3,16. El conocido decimal: 3,1416, que aparece en nuestros libros escolares, era ya habitual en tiempos de Tolomeo, 150 años después de J. C.

Teóricamente, el método de Arquímedes para calcular  $\pi$ , aumentando el número de los polígonos, puede extenderse indefinidamente, pero los cálculos necesarios, pronto se hacen muy engorrosos. Ello no obstante, durante la Edad Media dichos cálculos fueron realizados apasionadamente.

Francisco Vieta, el más eminente matemático del siglo XVI, aunque no de profesión, hizo un gran progreso en el cálculo de  $\pi$ , determinando su valor hasta diez cifras decimales. Además dio la fórmula:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

que constituye un producto decimal, e hizo muchos otros importantes descubrimientos matemáticos. Vieta prestó servi-



cios al rey Enrique IV de Francia, en la guerra contra España, descifrando cartas interceptadas dirigidas por la Corona Española a sus gobernantes en los Países Bajos. Los españoles quedaron tan impresionados que atribuyeron a la magia su descubrimiento de la clave. No fue ni la primera ni la última vez que los esfuerzos de los matemáticos fueron infamados con el estigma de la brujería.

En 1596 el matemático alemán Ludolf van Ceulen, que residió por largos años en Holanda, calculó  $\pi$  con 35 cifras decimales. En lugar del epitafio, "muerto a los 40, enterrado a los 60", a propósito de que la función cerebral cesa precisamente cuando se supone que la vida recién comienza, van Ceulen que trabajó con el número  $\pi$  casi hasta el día de su muerte, ocurrida a los 70 años de edad, pidió que se inscribieran sobre la lápida de su sepulcro, como un digno epitafio, los 35 dígitos con que calculó  $\pi$ . Su deseo fue cumplido. El valor que dio para  $\pi$  es, en parte: 3,14159265358979323846... En recuerdo de su hazaña, los alemanes llaman todavía a  $\pi$  el número ludolfiano. Nosotros proponemos denominarlo el número arquimediano.

El número  $\pi$  alcanzó la madurez con la invención del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz. Se abandonó entonces el método griego y estuvieron de moda los recursos puramente algebraicos de series infinitas convergentes, productos infinitos y fracciones continuas. El inglés John Wallis (1616-1703) propuso uno de los más famosos productos:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots$$

La serie infinita de Leibniz, a diferencia del producto de Wallis para determinar  $\pi$ , es una suma:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Los sucesivos productos y sumas de los términos de estas series dan valores de  $\pi$  tan exactos como se desee. Estos métodos, típicos de los poderosos medios de aproximación usados no sólo en las matemáticas, sino también en otras ciencias, aunque son mucho menos engorrosos que el método empleado por los griegos, exigen, a pesar de eso, muchos cálculos. Los productos de la serie de Wallis son:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1} &= 2, \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \\ &= \frac{16}{9}, \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{45}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

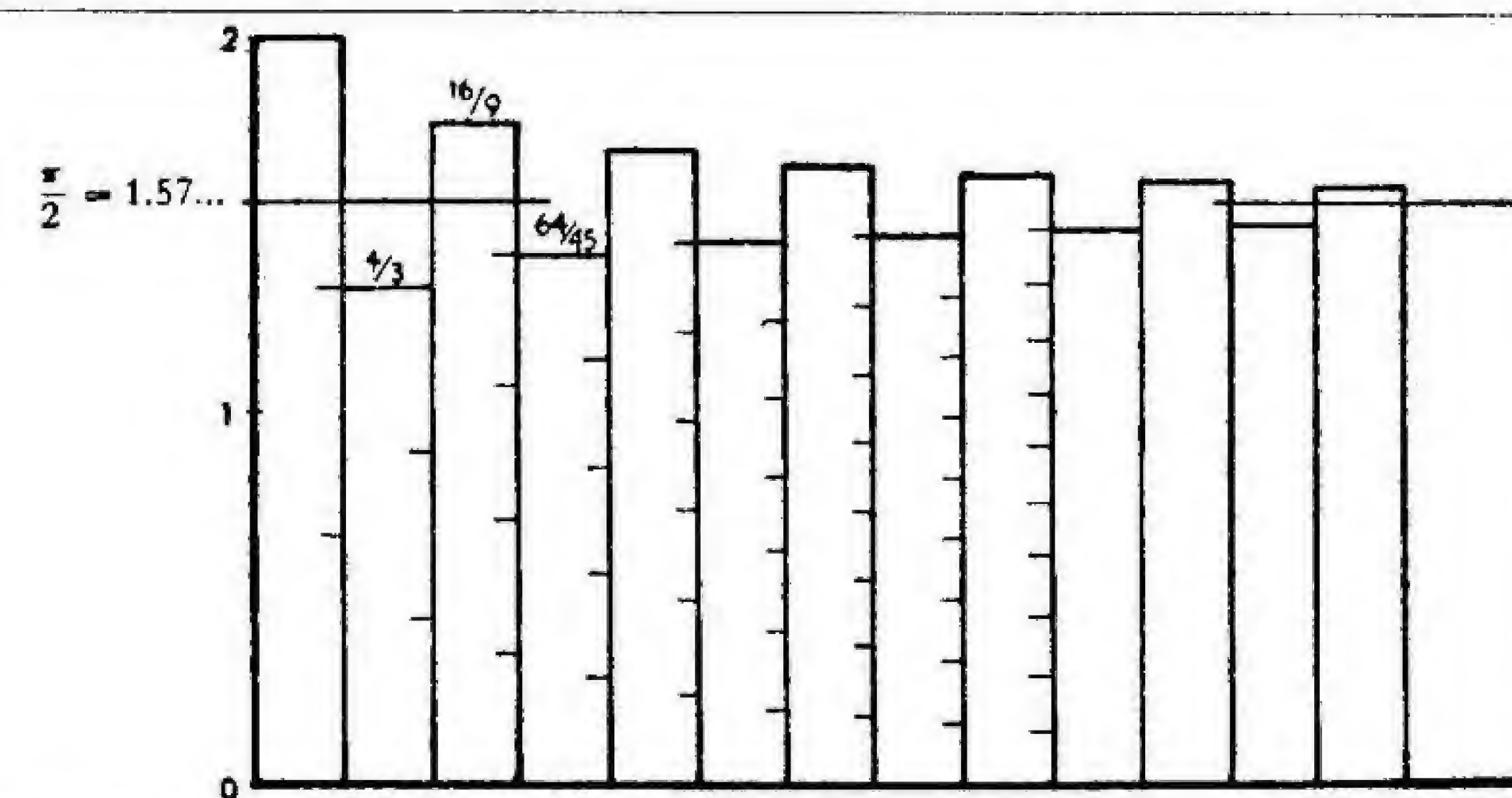


Fig. 17. Producto de Wallis:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 1,57... \\ \frac{\pi}{2} &= \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \dots \end{aligned}$$



Tomando las sucesivas sumas de la serie de Leibniz, obtenemos:

$$1. \quad 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105}, \text{ etc.}$$

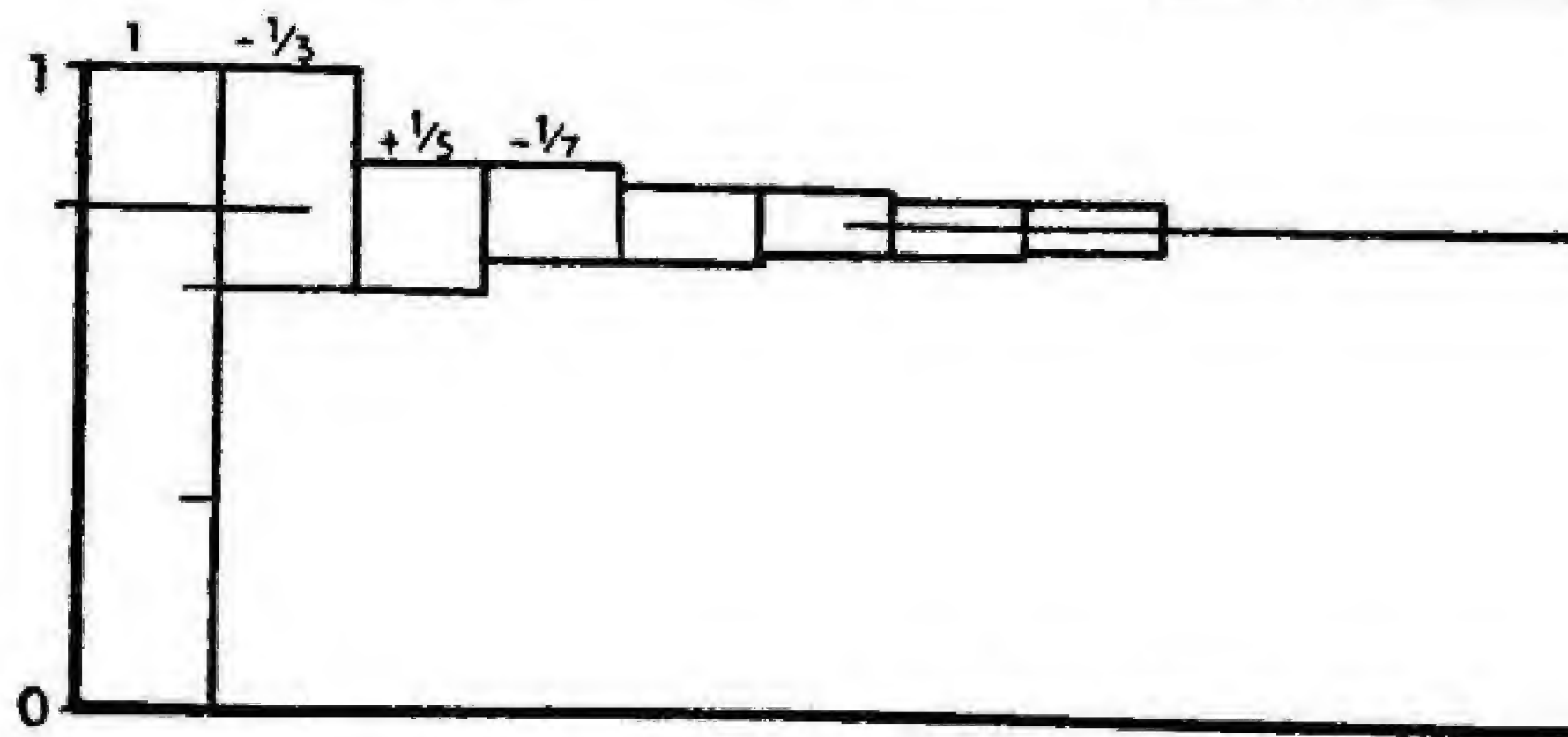


Fig. 18. Serie de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 0,785...$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Después de tomar los primeros 50 términos de estas series, los próximos 50 no producirán un valor de  $\pi$  sensiblemente más exactos, puesto que la serie converge más bien lentamente. La serie rápidamente convergente:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) - \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \dots \right)$$

es mucho más útil y se le emplea frecuentemente en las matemáticas modernas. Su relación con  $\pi$  fue establecida por Machin (1680-1752). Utilizando series de convergencia aún más rápida, Abraham Sharp, en 1699, calculó  $\pi$  con 71 cifras decimales. Dase, un calculista relámpago empleado por Gauss, obtuvo 200 cifras decimales en el año 1824. En 1854, Richter lo calculó hasta 500 decimales, y finalmente, en 1873, Shanks, un matemático inglés, alcanzó una curiosa clase de inmortalidad, determinando  $\pi$  con 707 decimales. Shanks dedicó veinte años al cálculo de las 707 cifras decimales de  $\pi$ ; desdichadamente, cometió un error en el decimal 528 (descubierto en 1945), y a partir de él todos los restantes están mal. Los métodos de cálculo electrónico actuales han permitido calcular más de un millón de cifras decimales de  $\pi$ , y el camino está abierto para que puedan alcanzarse los millones de cifras que se quiera. Con todo, ello no representa un despilfarro de tiempo comparado con los billones de horas invertidas por millones de personas para resolver crucigramas y hacer "contratos" de bridge, por no aludir a los debates políticos.

Por supuesto que estos resultados no tienen uso concebible en las ciencias aplicadas. Aun en los trabajos que requieren mayor precisión no se necesitan ordinariamente más de diez cifras para  $\pi$ . El famoso astrónomo y matemático norteamericano Simon Newcomb hizo notar en una ocasión: "Diez cifras decimales son suficientes para dar la circunferencia de la Tierra hasta la fracción de una pulgada, y treinta decimales darían la circunferencia de todo el Universo visible hasta una cantidad imperceptible con el más poderoso telescopio."

¿Por qué, entonces, se ha dedicado tanto tiempo y esfuerzo a calcular  $\pi$ ? Hay dos razones para justificarlo. Primera: los matemáticos tenían la esperanza de que, estudiando series infinitas, podrían hallar alguna clave sobre su naturale-



za trascendente. Segunda: el hecho de que  $\pi$ , una razón puramente geométrica, pudiera obtenerse de tantas relaciones aritméticas —de series infinitas con poca o ninguna relación aparente con la geometría— era una interminable fuente de admiración y estímulo a la actividad matemática.

¿Quién podría imaginar —es decir, quién sino un matemático— que el número que expresa una relación fundamental entre el círculo y su diámetro podría resultar de la curiosa fracción comunicada por lord Brouncker (1620-1684) a John Wallis?

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\dots}}}}}$$

Pero, precisamente, semejantes relaciones entre las series infinitas y  $\pi$  son ejemplos de la profunda conexión que existe entre la mayoría de las formas matemáticas, geométricas o algebraicas. Es una simple coincidencia, una mera casualidad, el que  $\pi$  esté definido como la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. No importa cómo se relacionen entre sí las diversas partes de las matemáticas,  $\pi$  constituye en ellas una parte integrante<sup>11</sup>. En su obra *Budget of Paradoxes*, Augustus De Morgan da un ejemplo de cuán poco sugiere acerca de su origen la definición usual de  $\pi$ . El autor nombrado explicaba a un actuario cuáles eran las probabilidades para que, al cabo de un tiempo dado, cierta proporción de un grupo de personas siguiera viviendo y citó la fórmula empleada por los actuarios, en la que, como es sa-

bido, interviene  $\pi$ . Explicando el significado geométrico de  $\pi$ , el actuario, que lo había estado escuchando con interés, lo interrumpió exclamando: "Mi querido amigo, eso debe ser un error. ¿Qué tiene que ver un círculo con el número de personas sobrevivientes al cabo de un tiempo dado?"

Recapitulando brevemente, el problema de la cuadratura del círculo resulta ser una construcción imposible si únicamente se usan regla y compás. Las únicas construcciones posibles con estos instrumentos corresponden a ecuaciones algebraicas de primero y segundo grados. Lindemann demostró que  $\pi$  no solamente no es la raíz de una ecuación algebraica de primero o segundo grados, sino tampoco es la raíz de ninguna ecuación algebraica (con coeficientes enteros), no importa cuán grande sea el grado: en consecuencia,  $\pi$  es trascendente. Aquí, pues, está el fin de toda esperanza para demostrar este problema clásico de la manera deseada. Aquí hay imposibilidad matemática.

Cuando los filósofos griegos descubrieron que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional<sup>12</sup>, celebraron el descubrimiento sacrificando 100 bueyes. El descubrimiento, mucho más profundo, de que  $\pi$  es un número trascendente merece un sacrificio mayor. Una vez más los matemáticos triunfaron sobre el sentido común:  $\pi$  un número finito —la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro— es expresable con exactitud únicamente como la suma o producto de una serie infinita de números totalmente diferentes y aparentemente no relacionados. El área de la más sencilla de todas las figuras geométricas, el círculo, no puede determinarse por medios finitos (Euclidianos).

*e*

En el siglo XVII, tal vez el más grandioso de todos en lo que al desarrollo de las matemáticas se refiere, apareció una



obra que en la historia de la ciencia británica puede colocarse en segundo lugar, a continuación de la monumental *Principia* de sir Isaac Newton. En 1614, John Napier, de Merchiston, publicó su *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Una descripción de la admirable tabla de logaritmos), el primer tratado sobre logaritmos<sup>13</sup>. A Napier, que también inventó el punto decimal, le debemos una invención que es tan importante para las matemáticas como los números arábigos; el concepto de cero y el principio de la notación posicional<sup>14</sup>. Hasta hace muy pocos años, sin éstos, las matemáticas no habrían progresado probablemente mucho más allá del grado que habían alcanzado hace 2.000 años. Sin los logaritmos, los cálculos efectuados con facilidad por cualquier matemático neófito agotarían las energías de los más grandes matemáticos.

Ya que *e* y los logaritmos tienen el mismo árbol genealógico y se desarrollaron juntos, podemos, por el momento, volver nuestra atención hacia los logaritmos para descubrir algo de la naturaleza del número *e*.

Para confeccionar las tablas trigonométricas empleadas en la navegación y en la astronomía se requerían cálculos desmesurados y, en consecuencia, se le sugirió a Napier que inventara algún artificio para facilitar esos cálculos. Contemporáneos suyos, como Vieta y Ceulen, rivalizaron entre sí para llevar a cabo proezas aritméticas casi increíblemente difíciles, las cuales, aun en el mejor de los casos, resultaban ser una tarea de un trabajo sublime y penoso y una autoinmolación; con frecuencia toda esta labor se perdía como resultado de un pequeño descuido.

Napier tuvo buen éxito en el logro de su propósito: abreviar las operaciones de multiplicación y división, operaciones “tan fundamentales en su naturaleza, que acortarlas parece imposible”. Sin embargo, mediante los logaritmos, todo problema de multiplicación y división, no importa cuán compli-

cado sea, se reduce a una suma o resta relativamente sencilla. Multiplicar y dividir gúgoles y gúgolplexes resulta tan simple como sumar una insignificante columna de números.

Al igual que muchas otras de las fecundas y profundas invenciones en las matemáticas, la idea sobre la cual se basaban era tan simple que uno se asombra al pensar que, hasta entonces, a nadie se le hubiera ocurrido. Cajori refiere que Henry Briggs (1556-1631), profesor de geometría en Oxford, “quedó tan impresionado al admirar el libro de Napier, que dejó sus estudios en Londres para ir a rendir homenaje al filósofo escocés”. Briggs sufrió un atraso en su viaje y Napier se quejaba a un amigo común: “Ah, John. Mr. Briggs no vendrá.” En ese mismo momento se oyó llamar a la puerta y Briggs fue introducido al gabinete del lord. Ambos se quedaron casi un cuarto de hora contemplándose mutuamente, sin articular palabra alguna. Al final comentó Briggs: “Milord, he emprendido expresamente este largo viaje para conocerlo y saber por qué rasgo de talento o de inventiva llegó usted, antes que nadie, a idear esta excelente ayuda para la astronomía, es decir, los logaritmos; pero, milord, lo que más me maravilla es que nadie los haya descubierto antes, cuando ahora, que los conocemos, resultan tan fáciles.”

El concepto que tenía Napier de los logaritmos se basaba en una idea ingeniosa y bien conocida: una comparación entre dos puntos animados de movimiento, uno de los cuales engendra una progresión aritmética y el otro, una progresión geométrica.

Las dos progresiones:

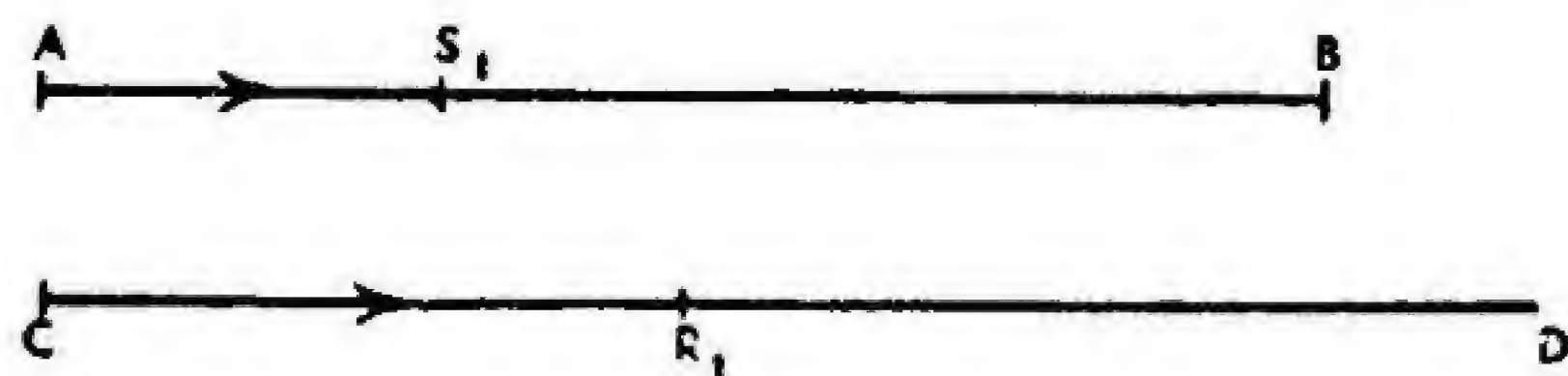
Aritmética	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
Geométrica	1	2	4	8	16	32	64	128	256...

muestran, una con respecto a la otra, esta interesante relación: Si se consideran como exponentes (potencias) de 2, a



los términos de la progresión aritmética, los términos correspondientes de la progresión geométrica representan la cantidad resultante de efectuar la operación indicada. Así <sup>15</sup>,  $2^0 = 1$ ,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ ,  $2^4 = 16$ ,  $2^5 = 32$ , etc. Además, para determinar el valor del producto  $2^2 \times 2^3$ , solamente es necesario sumar los exponentes, obteniendo:  $2^{2+3} = 2^5$ , que es el producto deseado. Llamando a 2, la base, cada término de la progresión aritmética es el LOGARITMO del término correspondiente de la progresión geométrica.

Napier explicó geométricamente esta noción de la siguiente manera: Un punto  $S$  se mueve a lo largo de la línea recta,  $AB$ , con una velocidad en cada punto  $S_1$  proporcional a la distancia restante  $S_1B$ . Otro punto  $R$  se mueve sobre una línea ilimitada,  $CD$ , con una velocidad uniforme igual a la velocidad inicial de  $S$ . Si ambos puntos parten de  $A$  y  $C$  al mismo tiempo, el *logaritmo* del número medido por la distancia  $S_1B$  está dado por la distancia  $CR_1$ .



**Fig. 19.** Interpretación dinámica de Napier de los logaritmos.

Por este método, a medida que  $S_1B$  decrece, su logaritmo  $CR_1$  aumenta. Pero pronto se puso de manifiesto que era conveniente definir el logaritmo de 1 como cero y que el logaritmo creciera con el número. De conformidad con ello, Napier cambió su sistema.

Uno de los frutos de la educación superior es la opinión luminosa de que un logaritmo es simplemente un número que se encuentra en una tabla. Tendremos que ampliar el

plan de estudios. Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres números relacionados entre sí por la ecuación:  $a^b = c$ , entonces  $b$ , el exponente de  $a$ , es el logaritmo de  $c$  en base  $a$ . En otras palabras, el logaritmo de un número en base  $a$  es la potencia a la cual debe elevarse  $a$ , para obtener dicho número. En el ejemplo:  $2^3 = 8$ , el logaritmo de 8 en base 2 es 3. O bien, en  $10^2 = 100$ , el logaritmo de 100 en base 10 es 2. La manera concisa de expresar esto es:  $3 = \log_2 8$ ,  $2 = \log_{10} 100$ . La sencilla tabla que va a continuación resume las propiedades esenciales de los logaritmos:

$$(1) \log_a (b \times c) = \log_a b + \log_a c.$$

$$(2) \log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$$

$$(3) \log_a b^c = c \times \log_a b.$$

$$(4) \log_a \sqrt[c]{b} = \left( \frac{1}{c} \right) \log_a b.$$

Las ecuaciones (1) y (2) indican cómo multiplicar o dividir dos números; no se requiere otra cosa que sumar o restar sus respectivos logaritmos. El resultado obtenido es el logaritmo del producto, o del cociente. Las ecuaciones (3) y (4) enseñan que, con ayuda de los logaritmos, las operaciones de elevar a potencias o extraer raíces pueden ser reemplazadas por las mucho más sencillas de multiplicar y dividir.

Pronto se construyeron extensas tablas de logaritmos, en base 10 y en base  $e$ , llamada natural o neperiana. Estas tablas fueron tan distribuidas, que los matemáticos de toda Europa pudieron beneficiarse con el empleo de los logaritmos al cabo de muy poco tiempo después de su invención. Kepler no solamente vio las tablas de Napier, sino que él mismo promovió su desarrollo; fue así uno de los primeros de la legión de hombres de ciencia cuya contribución al conocimiento fue facilitada, en gran medida, por los logaritmos.



Los dos sistemas de logaritmos, en las bases 10 y  $e$  (los de Briggs y de base natural respectivamente), son los principales que hoy se usan, prevaleciendo los de base  $e$ <sup>16</sup>. Al igual que  $\pi$ , el número  $e$  es trascendente y es, como  $\pi$ , lo que P. W. Bridgman denomina un "programa de procedimiento", más bien que un número, ya que nunca puede ser expresado completamente: (1) con un número finito de dígitos, (2) como la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros, (3) como un decimal infinito aunque periódico<sup>17</sup>. Solamente puede expresarse con exactitud como el límite de una serie infinita convergente o de una fracción continua. La más sencilla y más conocida de las series infinitas que dan el valor de  $e$ , es:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \dots^{18}$$

Por consiguiente, su valor puede aproximarse tanto como se desee, con sólo tomar términos adicionales de la serie. Hasta la décima cifra decimal:  $e = 2,7182818285$ . Una mirada a la tabla que va a continuación, indicará cómo se comporta una serie infinita convergente a medida que se suman más y más términos:

$$\begin{array}{ll} (1) 1 + \frac{1}{1!} & = 2 \\ (2) 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} & = 2,5 \\ (3) 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} & = 2,6666666... \\ (4) 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} & = 2,7083334... \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (5) 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} & = 2,7166666... \\ (6) 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{6!} & = 2,7180555... \\ (7) 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{7!} & = 2,7182539... \\ (8) 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{8!} & = 2,7182787... \\ (9) 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{9!} & = 2,7182818... \end{array}$$

Después de tomar algunos términos más, resulta que  $e$  es igual a:

$$2,7182818284590452353602874...$$

Euler, que indudablemente tenía en las matemáticas el tacto de Midas, no sólo inventó el símbolo  $e$  y calculó su valor hasta 23 decimales, sino que dio para él varias expresiones muy interesantes, de las cuales estas dos son las más importantes:

$$(1) e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + 5 \dots}}}}}$$



$$(2) \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 \dots}}}}}}}$$

No sólo fue causa del gran desarrollo alcanzado por los logaritmos la necesidad de tablas para la navegación. También los grandes negocios, particularmente los bancos, tuvieron aquí su papel. Una serie notable, cuyo valor en el límite es  $e$ , aparece en la preparación de las tablas de interés compuesto. Esta serie se obtiene desarrollando  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  cuando  $n$  tiende a infinito. El origen de esta importante expresión es interesante.

Suponga que su banco le paga el 3 % de interés anual por sus depósitos. Si este interés se acumula al final de cada año, durante un período de tres años, el monto a su favor, suponiendo un capital original de \$1,00, estará dado por la fórmula:  $(1 + 0,03)^3$ . Si el interés es *compuesto* semestralmente, al cabo de un período de tres años, el total de capital más interés sería:  $\left(1 + \frac{0,03}{2}\right)^{2 \times 3}$ .

Imagínese, sin embargo, que usted es lo suficientemente afortunado como para encontrar un banco filantrópico que decide pagarle el 100 % de interés anual. Entonces, el monto a su favor al finalizar el primer año será  $(1 + 1)^1 = \$2,00$ .

Si el interés se compone semestralmente, el monto será:  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{1 \times 2} = 2 \frac{1}{4}$  ó sea \$ 2,25. Si se capitalizara trimestralmente sería:  $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1 \times 4} = \$2,43$ . Parece evidente que, cuantas más veces se componga el interés, tanto más dinero tendrá usted en el banco. Con un nuevo esfuerzo de imaginación usted puede concebir la posibilidad de que el banco filantrópico decida componer el interés *continuamente*, es decir *en cada* uno de los instantes del año. ¿Cuánto dinero tendrá usted entonces al final del año? Sin duda una fortuna. Por lo menos, eso es lo que usted sospecharía, aun teniendo en cuenta sus experiencias con bancos. Claro está que usted podría llegar a ser, no un millonario ni un billonario, sino más bien lo que podría definirse como un "infinitario". ¡Ay!, deje de lado todas las ilusiones de grandeza, porque el proceso de componer intereses continuamente en cada instante, da origen a una serie infinita que *converge* al límite  $e$ . La suma depositada al cabo de este año agitado, con su aparente promesa de incalculables riquezas, no sería más que \$2,72. Porque si uno se toma la molestia de desarrollar  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , cuando  $n$  llega a ser muy grande<sup>19</sup> los valores sucesivos así obtenidos, se aproximan al valor de  $e$  y cuando  $n$  se hace infinito,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  produce realmente la suma infinita que da  $e$ :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Además de servir como base de los logaritmos naturales,  $e$  es un número útil en todas partes, en las matemáticas y en



las ciencias aplicadas. Ninguna otra constante matemática, ni siquiera  $\pi$ , está más estrechamente vinculada a las cuestiones humanas. En economía, estadística, en la teoría de la probabilidad y en la función exponencial,  $e$  ha contribuido a hacer una cosa y a hacerla mejor que cualquier otro número descubierto hasta ahora. Ha representado un papel preponderante ayudando a los matemáticos a describir y pronosticar lo que para el hombre constituye el más importante de todos los fenómenos naturales, el del crecimiento.

La función exponencial:  $y = e^x$ , es el instrumento usado, en una u otra forma, para describir el comportamiento de las cosas que crecen. Es para esto singularmente apropiada: es *la única función de  $x$  que tiene una razón de cambio, con respecto a  $x$ , igual a la función misma*<sup>20</sup>. Una función, como se recordará, es una tabla que da una relación entre dos cantidades variables en la que un cambio en una de ellas implica algún cambio en la otra. El costo de una cantidad de carne es una función de su peso; la velocidad de un tren, una función de la cantidad de carbón consumida; la cantidad de transpiración producida, una función de la temperatura. En cada uno de estos ejemplos, un cambio en la segunda variable: peso, cantidad consumida de carbón y temperatura, tiene correlación con un cambio en la primera variable: costo, velocidad y volumen de transpiración. El simbolismo de las matemáticas permite que las relaciones funcionales sean expresadas sencillamente y en forma concisa. De este modo:  $y = x$ ;  $y = x^2$ ;  $y = \sin x$ ;  $y = \operatorname{cosec} x$ ;  $y = e^x$ , son ejemplos de funciones.

Una función no sólo es adecuada para describir el comportamiento de un proyectil en su trayectoria, de un volumen de gas sometido a cambios de presión, de una corriente eléctrica circulando a través de un conductor, sino también otros procesos que suponen cambios, tales como el crecimiento de una población, el desarrollo de un árbol, el crecimiento de una

ameba, o, como lo acabamos de ver, el crecimiento de capital e interés. Es privativo de todo proceso orgánico, que la *variación* de crecimiento sea proporcional al *estado* de crecimiento. Cuanto más grande es una cosa, tanto más rápidamente crece. En condiciones ideales, cuanto más grande llega a ser la población de un país, tanto más rápidamente aumenta. La variación de la rapidez de muchas reacciones químicas es proporcional a la cantidad de sustancias reactivas que intervienen. O bien, la cantidad de calor cedida por un cuerpo caliente al medio ambiente, es proporcional a la temperatura. La proporción en la cual la cantidad total de sustancia radiactiva disminuye a cada instante, debido a las emanaciones, es proporcional a la cantidad total presente en ese instante. Todos estos fenómenos que son, o se parecen, a los procesos orgánicos, pueden ser descritos, con exactitud, por una forma de la función exponencial (siendo la más simple:  $y = e^x$ ) por cuanto ésta tiene la propiedad de que su razón de cambio es proporcional a la razón de cambio de su variable.

Un universo donde faltaran  $\pi$  y  $e$ , como lo ha dicho algún espíritu antropomórfico, no sería inconcebible. Difícilmente uno podría imaginarse que el Sol dejaría de salir o que las mareas cesaran por falta de  $\pi$  y  $e$ . Pero sin estos artificios matemáticos, lo que sabemos del Sol y las mareas, e incluso nuestra capacidad para describir todos los fenómenos naturales, físicos, biológicos, químicos o estadísticos, quedarían reducidos a dimensiones primitivas.

*i*

Alicia censuraba a Humpty Dumpty por las libertades que se tomaba con las palabras: "Cuando yo uso una palabra".



replicó Humpty con tono despreciativo, "ésta significa precisamente aquello que yo quise decir —ni más ni menos." "La cuestión es", dijo Alicia, "si puedes hacer que una palabra signifique tantas cosas diferentes". "La cuestión es", dijo Humpty, "conocer a fondo el asunto, eso es todo".

Aquellos que están preocupados (y son muchos), por la palabra "imaginario", tal como se la usa en matemáticas, deberían prestar atención a las palabras de Humpty Dumpty. Por supuesto que, a lo sumo, esto es cosa de poca importancia. Repetidas veces en las matemáticas, a palabras muy familiares se les atribuyen significados técnicos. Pero, como lo ha dicho tan perspicazmente Whitehead, esto sólo es confuso para inteligencias inferiores. Cuando una palabra está definida con precisión y significa solamente una cosa, no hay más razón para criticar su uso que para criticar el uso de un nombre propio. Nuestros nombres de pila pueden no agradarnos, o no satisfacer a nuestros amigos, pero ocasionan pocas equivocaciones. La confusión surge únicamente cuando la misma palabra tiene varias acepciones y es lo que Humpty Dumpty llama una "maleta de viaje".

La semántica, una ciencia que hoy día está de moda, se dedica al estudio del uso adecuado de las palabras. Sin embargo, hay mucha mayor necesidad de la semántica en otras ramas de la ciencia que en las matemáticas. En efecto, la mayor parte de los males que aquejan hoy al mundo, provienen del hecho de que algunos de sus más volubles dirigentes son decididamente antisemánticos.

Un número imaginario representa una idea matemática precisa, que se introdujo por la fuerza en el álgebra de la misma manera que con los números negativos. Llegaremos a entender más claramente cómo entraron en uso los números imaginarios si consideramos el desarrollo de sus progenitores, los números negativos.

Los números negativos aparecieron como raíces de ecua-

ciones tan pronto hubo ecuaciones o, mejor dicho, tan pronto como los matemáticos se ocuparon del álgebra. Toda ecuación de la forma  $ax + b = 0$ , en la que  $a$  y  $b$  son mayores que cero, tiene una raíz negativa.

Los griegos, para quienes la geometría era un goce y el álgebra un mal necesario, descartaron los números negativos. Incapaces de adaptarlos a su geometría, imposibilitados para representarlos gráficamente, los griegos no consideraron, en modo alguno, a los números negativos. Pero el álgebra los necesitaba para desarrollarse. Más sabios que los griegos, más sabios que Omar Khayyám<sup>21</sup>, los chinos y los hindúes reconocieron los números negativos antes de la era cristiana. Recién eruditos en geometría, no tenían escrúpulos de conciencia con respecto a los números que no podían representar mediante dibujos. En las teorías contemporáneas de la física matemática (relatividad, mecánica cuántica, etc.), que, si bien son comprensibles como símbolos en el papel, desafían diagramas, cuadros o metáforas adecuadas para explicarlas en términos de la experiencia común, hay una repetición de esa indiferencia hacia el deseo de representaciones concretas para ideas abstractas.

Cardano, eminente matemático del siglo XVI, jugador y bribón de vez en cuando y a quien el álgebra le debe muchísimo, fue el primero que reconoció la verdadera importancia de las raíces de números negativos. Pero su conciencia científica lo remordió hasta tal punto que las llamó "ficticias". Rafael Bombelli, de Bologna, prosiguió la obra de Cardano donde éste la había dejado. Este último había hablado de las raíces cuadradas de números negativos, pero no llegó a comprender el concepto de imaginarios. En una obra publicada en 1572, Bombelli señaló que las cantidades imaginarias eran indispensables para la solución de muchas ecuaciones algebraicas de la forma:  $x^2 + a = 0$ , donde  $a$  es cualquier número mayor que cero, y que no pueden ser re-



sueñas sino con el auxilio de imaginarios. Tratando de resolver una ecuación sencilla como  $x^2 + 1 = 0$  hay dos alternativas. O la ecuación no tiene sentido, lo cual es absurdo, o  $x$  es la raíz cuadrada de  $-1$ , que también es absurdo. Pero las matemáticas se alimentan de absurdos y Bombelli salió del paso aceptando la segunda alternativa.

Más de cuatrocientos años han transcurrido desde que Bombelli hizo su elección. Filósofos, hombres de ciencia y gentes dotadas de esa cualidad mental, de tono menor, conocida como sentido común, han criticado, en un siempre creciente *decrecendo*, el concepto de imaginario. Todas estas notabilidades han muerto y la mayoría de ellos han sido relegados al olvido, mientras que los números imaginarios florecen, perversa y desenfrenadamente, por todo el campo de las matemáticas.

A veces, aun los maestros se burlaron. Leibniz pensó: "Los números imaginarios son un excelente y maravilloso refugio del Espíritu Santo, una especie de anfibio entre ser y no ser." Aun el portentoso Euler expresó que números como la raíz cuadrada de menos uno "no son ni nada, ni menos que nada, lo cual necesariamente los hace imaginarios, o imposibles". Estaba en lo cierto, pero omitió decir que los imaginarios eran útiles e imprescindibles para el desarrollo de las matemáticas. Y así, se les asignó un lugar en el dominio de los números con todos los derechos, privilegios e inmunidades pertenecientes a ellos. Con el transcurso del tiempo fueron disipándose los temores y los reparos sobre su naturaleza, de modo que el criterio de Gauss sobre los mismos es el que prevalece en la actualidad:

Nuestra aritmética general, que hasta aquí supera en extensión a la geometría de los antiguos, constituye, por completo, la crea-

ción de los tiempos modernos. Comenzando en su origen con la noción de los números enteros absolutos, ha ensanchado gradualmente su dominio. A los números enteros se han agregado las fracciones; a las cantidades racionales, las irracionales; a las positivas, las negativas, y a las reales, las imaginarias. Este progreso, sin embargo, siempre se ha hecho, al principio, con pasos vacilantes y tímidos. Los primeros algebristas llamaron raíces falsas a las raíces negativas de las ecuaciones, y éste es, en realidad, el caso cuando el problema al cual se refieren ha sido enunciado de tal manera que el carácter de la cantidad buscada no admite lo contrario. Pero así como en la aritmética general nadie vacilaría en aceptar las fracciones, aunque hay tantas cosas contables para las cuales una fracción no tiene sentido, del mismo modo no desconoceríamos a los números negativos los derechos acordados a los números positivos por la sola razón de que hay innumerables cosas que no los admiten. La realidad de los números negativos está suficientemente justificada, ya que en otros innumerables casos encuentran una adecuada interpretación. Hace tiempo que ya ha sido aceptado, pero las cantidades imaginarias, antiguamente y a veces ahora, impropriamente llamadas imposibles, como opuestas a las cantidades reales —son, todavía, más bien toleradas que completamente naturalizadas; aparecen más como un juego inútil sobre símbolos, a los cuales les niegan, sin vacilar, un sustrato concebible, aun aquellos que no despreciarían la rica contribución que este juego con símbolos ha aportado al tesoro de las relaciones de las cantidades reales<sup>22</sup>.

Los números imaginarios, como la geometría de cuatro dimensiones, surgieron de la extensión lógica de ciertos procesos. El proceso de extraer raíces se denomina evolución. Es un nombre a propósito, porque los números imaginarios evolucionaron, literalmente, por la extensión del proceso de extraer raíces. Si  $\sqrt{4}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{11}$  tenían sentido, ¿por qué no habrían de tenerlo  $\sqrt{-4}$ ,  $\sqrt{-7}$ ,  $\sqrt{-11}$ ? Si  $x^2 - 1 = 0$  tenía una solución, ¿por qué no iba a tenerla  $x^2 + 1 = 0$ ? El reconocimiento de los imaginarios era como el reconoci-



miento de la Rusia Soviética por los Estados Unidos —la existencia era innegable, todo lo que se necesitaba era una sanción formal y su aprobación.

El imaginario más conocido es  $\sqrt{-1}$ . Euler lo representó con el símbolo " $i$ " que se usa todavía<sup>23</sup>. Es inútil ocuparse de la pregunta: "¿Qué número al ser multiplicado por sí mismo, es igual a  $-1$ ?" Al igual que todos los otros números,  $i$  es un símbolo que representa una idea abstracta, pero muy precisa. Obedece a todas las reglas de la aritmética, a las que se agrega el convenio de que:  $i \times i = -1$ . Su obediencia a estas reglas y sus múltiples usos y aplicaciones justifican su existencia.

Las leyes formales de operación para  $i$  son fáciles; ya que la regla de los signos estipula que:

$$\left. \begin{array}{l} (+1) \times (+1) = +1 \\ (+1) \times (-1) = -1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (-1) \times (+1) = -1 \\ (-1) \times (-1) = +1 \end{array} \right.$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} i \times (+1) &= \sqrt{-1} \\ i \times (-1) &= -\sqrt{-1} \\ -i \times (-1) &= +i \\ &= \sqrt{-1} \\ i \times i &= i^2 \\ &= -1 \\ i \times i \times i &= i^3 \\ &= (\sqrt{-1}) (\sqrt{-1})^2 \\ &= (\sqrt{-1}) \cdot (-1) \\ &= -\sqrt{-1} \\ i \times i \times i \times i &= i^4 \\ &= (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 \\ &= (-1) \times (-1) \\ &= +1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \times i \times i \times i \times i &= i^5 \\ &= (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1}) \\ &= (-1) \times (-1) \times \sqrt{-1} \\ &= (+1) \times \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{-1}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

De lo cual podemos construir una tabla muy útil.

$i^1$	$= \sqrt{-1} = i$	$i^2$	$= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$
$i^3$	$= -1 \cdot \sqrt{-1} = -i$	$i^4$	$= (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = +1$
$i^5$	$= +1 \cdot \sqrt{-1} = i$	$i^6$	$= +1 \cdot (\sqrt{-1})^2 = -1$
$i^7$	$= -1 \cdot \sqrt{-1} = -i$	$i^8$	$= -1 \cdot (\sqrt{-1})^2 = +1$
$\downarrow$		$\downarrow$	

Esta tabla nos indica que las potencias *impares* de  $i$  son iguales a  $-i$ , o  $+i$ , y que las potencias *pares* de  $i$  son iguales a  $-1$  ó  $+1$ .

La extensión del uso de los imaginarios ha conducido a los números complejos de la forma:  $a + ib$ , donde  $a$  y  $b$  son números *reales* (para distinguirlos de los imaginarios). Así:  $3 + 4i$ ;  $1 - 7i$ ;  $2 + 3i$ , son ejemplos de números complejos.

El enormemente fecundo campo de la teoría de funciones es consecuencia directa del desarrollo de los números complejos. Si bien éste es un tema demasiado técnico y especializado, tendremos ocasión de mencionar de nuevo los números complejos cuando expliquemos la representación geométrica de los imaginarios. Con ese fin, debemos ocuparnos por un momento de esa idea matemática que, como dijo Boltzmann en cierta ocasión, parece casi más inteligente que el hombre que la inventó: la ciencia de la Geometría Analítica.



La música descriptiva se distingue de la música absoluta, la cual debe su coherencia a la estructura, en que el propósito de la primera es narrar un determinado argumento. En cierto sentido, la geometría analítica puede distinguirse de la geometría de los griegos, del mismo modo en que la música descriptiva se distingue de la música absoluta. La geometría, práctica en sus orígenes, fue cultivada y desarrollada por amor a ella misma, como disciplina lógica y como estudio de las formas. La geometría era una manifestación del esfuerzo por lograr un ideal. Los cuerpos y las formas que eran estudiados ansiosamente. Pero los griegos cultivaron lo práctico solamente hasta donde era compatible con lo hermoso; más allá de ello, sus matemáticas se vieron trabadas por su estética.

Se dejó a Descartes la tarea de escribir la música descriptiva de las matemáticas, de inventar una geometría que relatara una narración. Cuando se dice que toda ecuación algebraica tiene un retrato, estamos describiendo la relación existente entre la geometría analítica y el álgebra. Y así como la música descriptiva es tan importante y significativa en sí misma como el cuento que representa, así la geometría analítica tiene su propia dignidad e importancia —es una disciplina matemática autónoma.

Los padres jesuitas eran, a menudo, muy sensatos. En su escuela situada en La Flèche, permitieron al joven René Descartes, a causa de su delicada salud, quedarse en la cama todas las mañanas hasta mediodía. No es difícil imaginarse lo que McGuffey\* habría profetizado sobre el futuro de semejante niño. Pero Descartes no resultó un perdido. En efecto, su delicioso hábito de permanecer en cama hasta mediodía,

dio, por lo menos, un fruto notable. La geometría analítica vino a él una mañana mientras estaba acostado plácidamente.

Es portentosa esta idea de una geometría con coordenadas y, sin embargo, tan fácil de comprender. Considérense dos rectas (ejes) en un plano:  $xx'$ ,  $yy'$  que se cortan formando ángulos rectos en un punto  $R$ .

Cualquier punto en todo el plano puede entonces determinarse, de una manera única, por su distancia perpendicular a las rectas  $xx'$  y  $yy'$ . El punto  $P$  por ejemplo, por las distancias  $m$  y  $m'$ . De este modo, un par de números que representan a los valores de las distancias con respecto a  $xx'$  y  $yy'$  determinan cada punto en el plano y, recíprocamente, cada punto del plano determina un par de números. Estos números se denominan las *coordenadas* del punto.

Todas las distancias sobre  $xx'$  medidas a la derecha de  $R$  son consideradas positivas y a la izquierda de  $R$ , negativas. Análogamente, todas las distancias medidas sobre  $yy'$  por

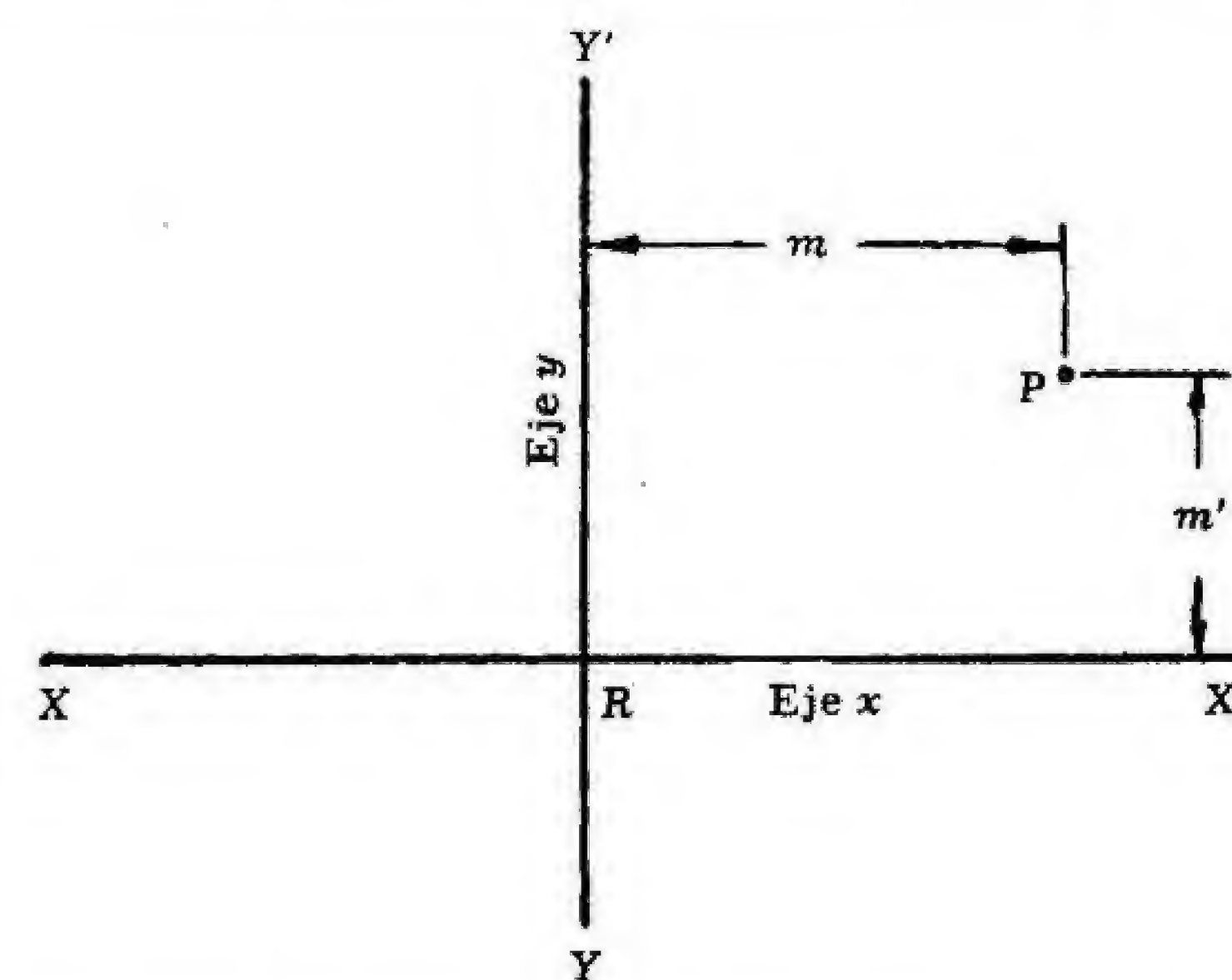


Fig. 20. El punto  $P$  tiene las coordenadas  $(m, m')$ .

\* William Holmes McGuffey (1800-1873), educador norteamericano. (N. del T.)



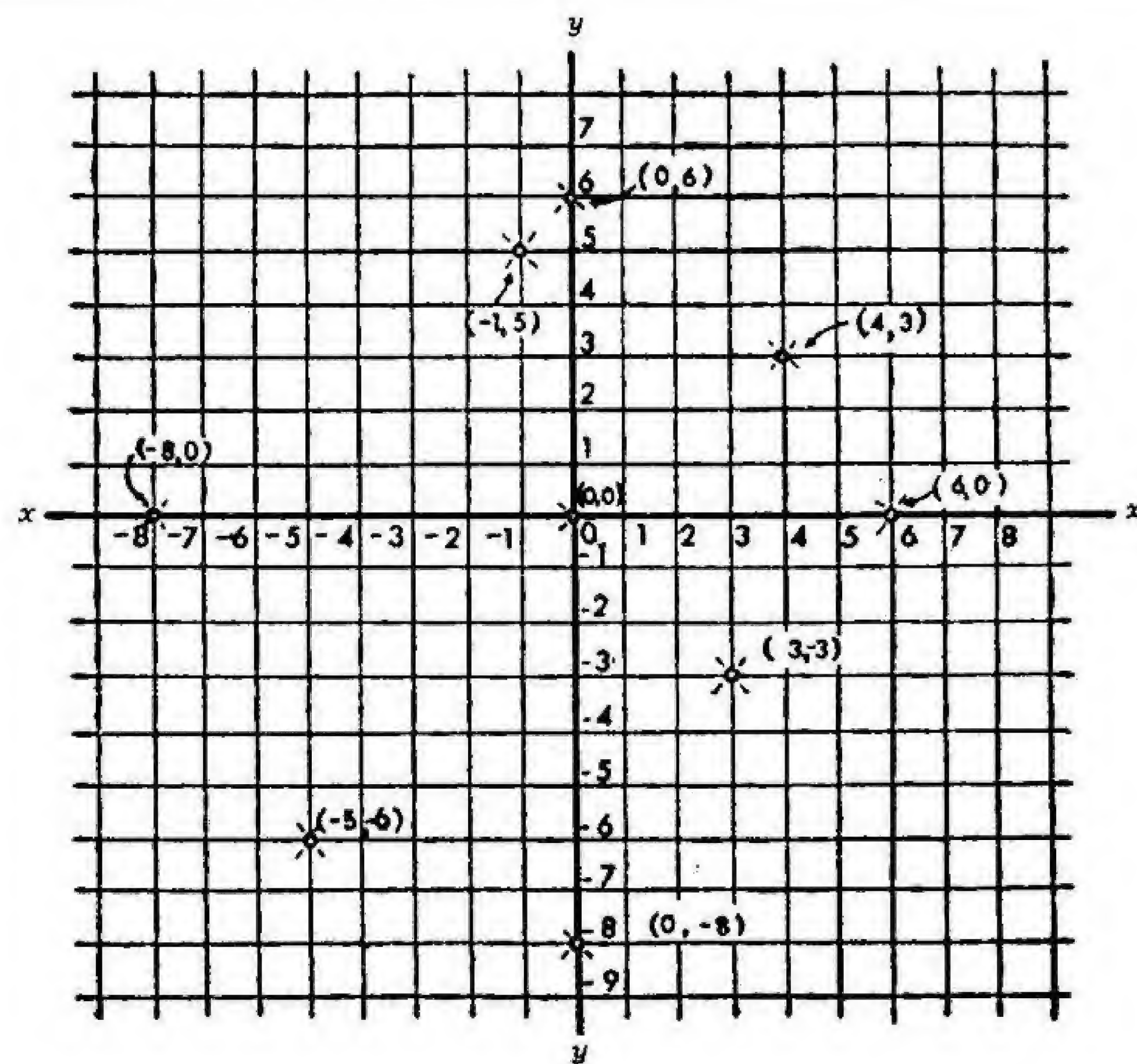


Fig. 21. Los ejes de coordenadas en el plano real.

encima de  $R$  son positivas y por debajo, negativas. El punto de intersección, el *origen*, queda determinado por las coordenadas  $(0, 0)$ . El convenio para la escritura de las coordenadas consiste en poner primero la distancia desde el eje  $yy'$  (es decir, la distancia a lo largo del eje  $xx'$ ) y en segundo lugar, la distancia desde el eje  $xx'$  a lo largo del eje  $yy'$ ; por ejemplo:  $(0, 0)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(-1, 5)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(-5, -6)$ ,  $(3, -3)$ ,  $(-8, 0)$ ,  $(0, -8)$  son las coordenadas de los puntos indicados en la figura 21.

Relacionando esta noción con la de una función no es difícil de ver cómo puede representarse gráficamente una ecuación en el plano de la geometría analítica. Cuando  $x$  y

$y$  están relacionadas funcionalmente, a cada valor de  $x$  le corresponde un valor de  $y$ , y estos dos valores determinan la posición de un punto en el plano. La totalidad de dichos pares de números, es decir, de todos los valores de  $y$  que corresponden a todos los valores de  $x$ , cuando se unen mediante una curva continua, como la figura 22 (a, b, c), determinan el retrato geométrico de una ecuación.

Empleando la geometría analítica, ¿cómo representamos un número imaginario tal como  $\sqrt{-1}$ ? Un teorema de geometría elemental, referente a la media geométrica, nos da la clave (véase la fig. 23).

En el triángulo rectángulo  $ABC$ , la perpendicular  $AD$  divide a  $BC$  en dos partes  $BD$ ,  $DC$ . La longitud de la perpendicular  $AD$  es igual a  $\sqrt{BD \times DC}$  y se denomina la *media geométrica* entre  $BD$  y  $DC$  (fig. 23).

Un agrimensor noruego, Wessel, y un tenedor de libros

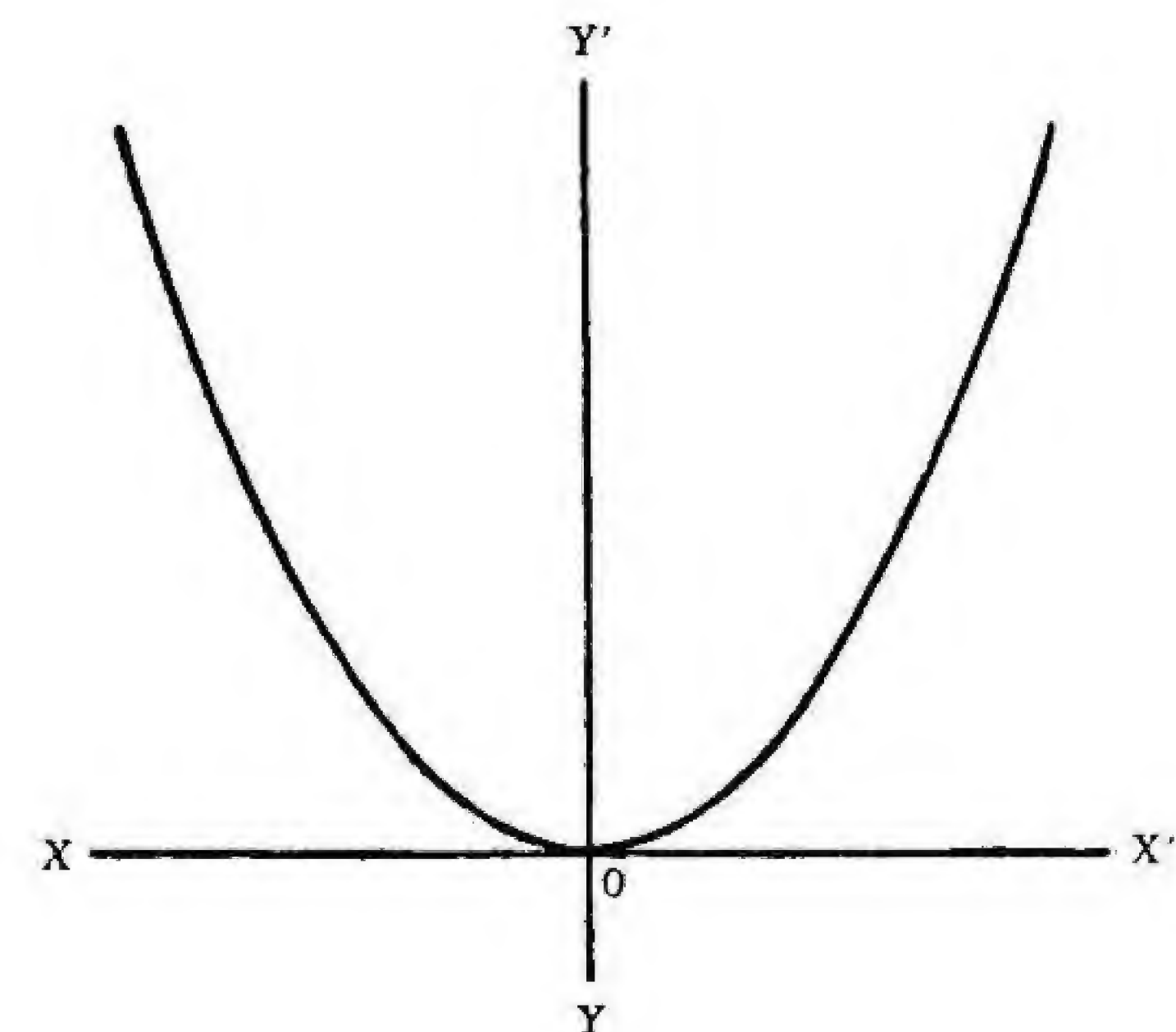
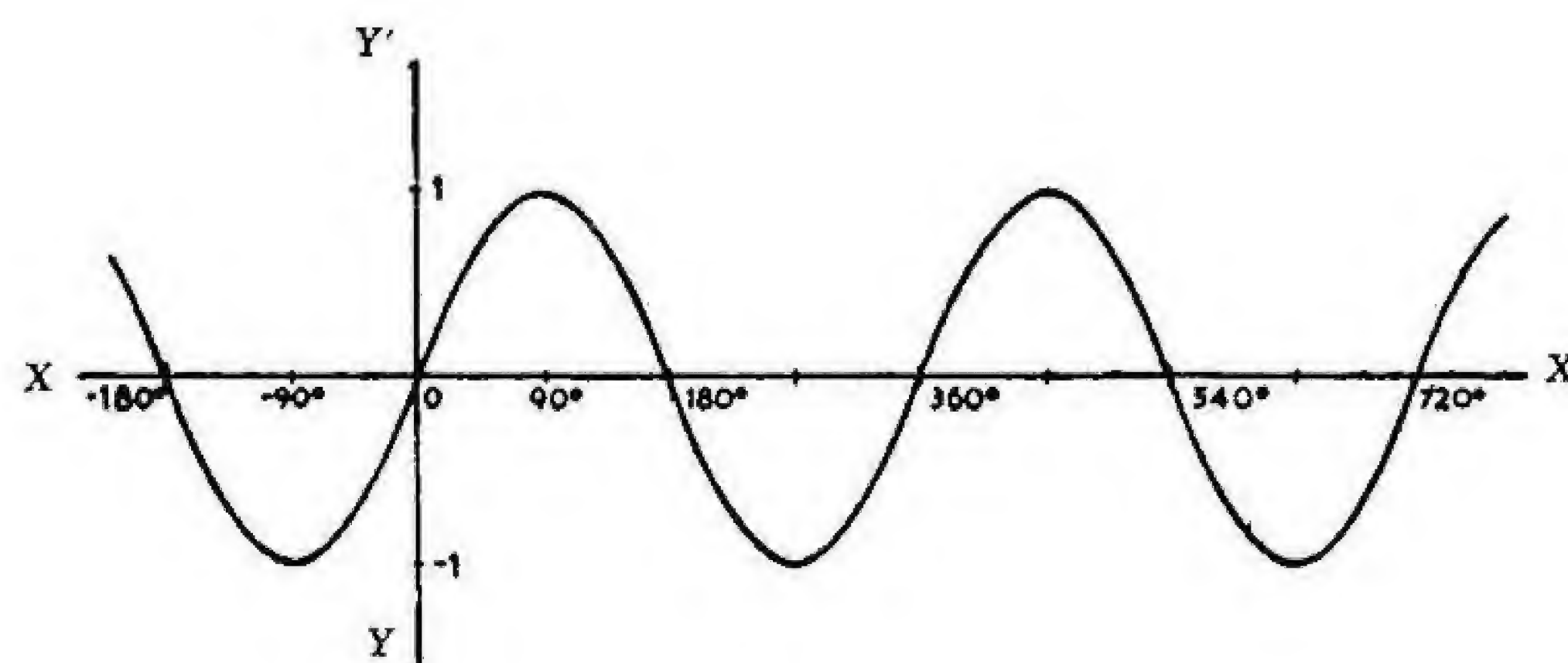
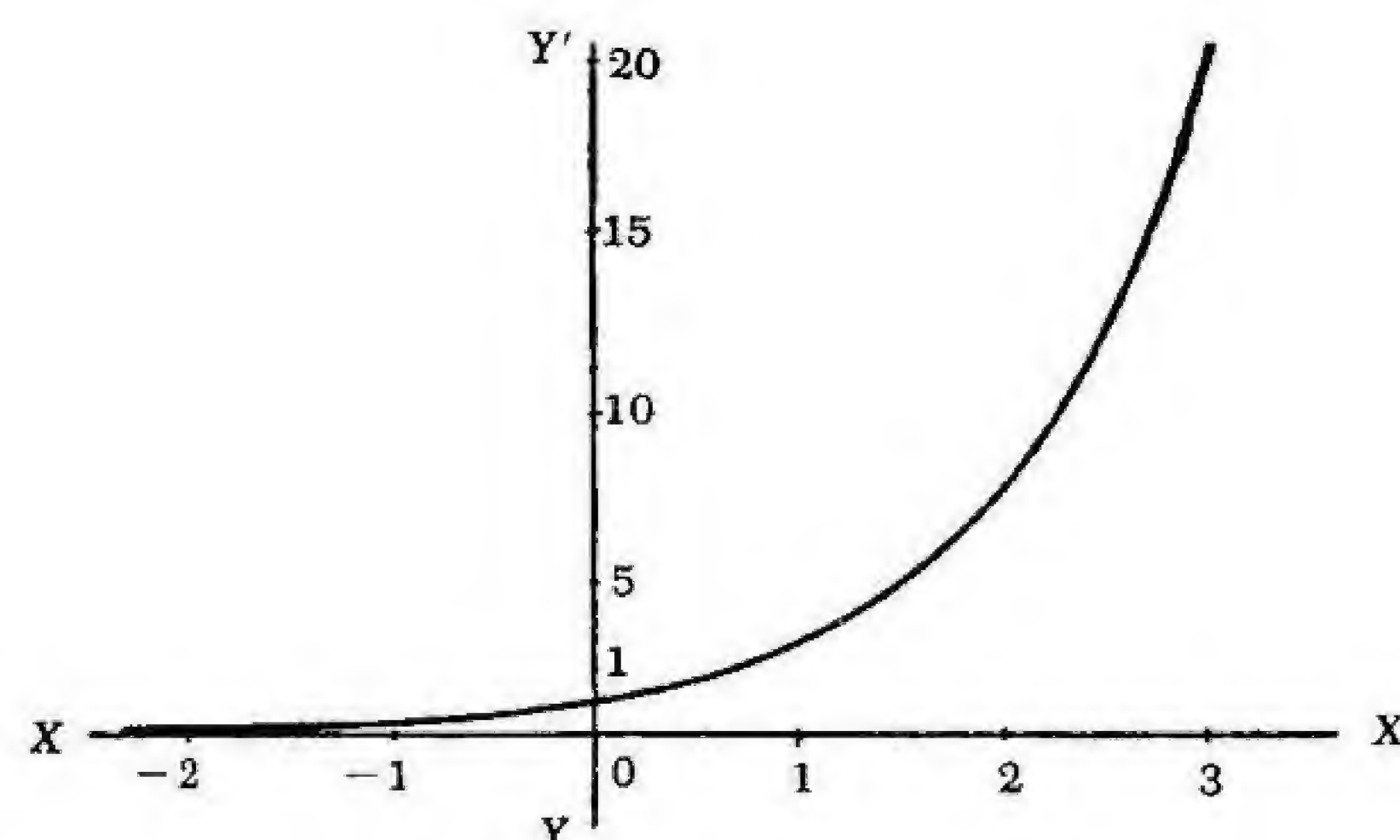


Fig. 22(a). Representación gráfica de la ecuación,  $y = x^2$ .

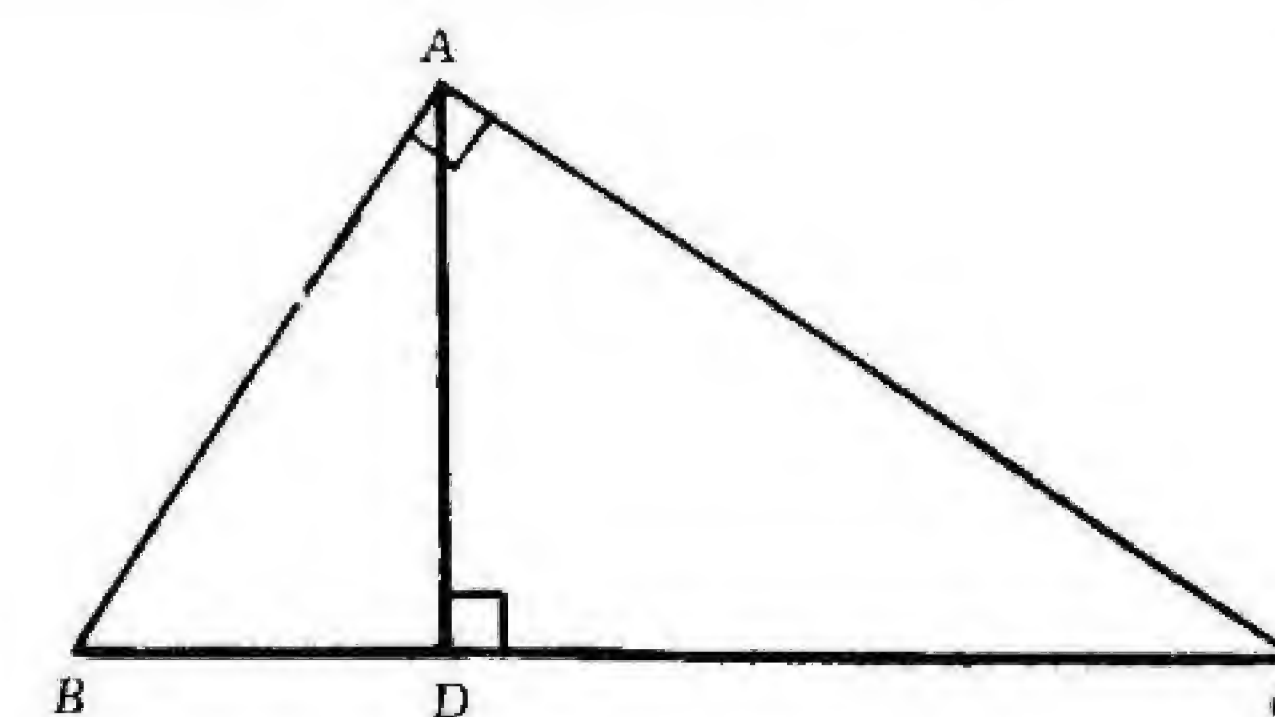




**Fig. 22(b).** Representación gráfica de la ecuación  $y = \sin x$ . Ésta es la famosa curva ondulada que se emplea para representar muchos fenómenos periódicos y regulares, por ejemplo, la corriente eléctrica, el movimiento de un péndulo, la radio transmisión, las ondas sonoras y luminosas, etc. (Para el significado de  $\sin x$ , véase la nota 2 en el capítulo sobre el cálculo infinitesimal.)

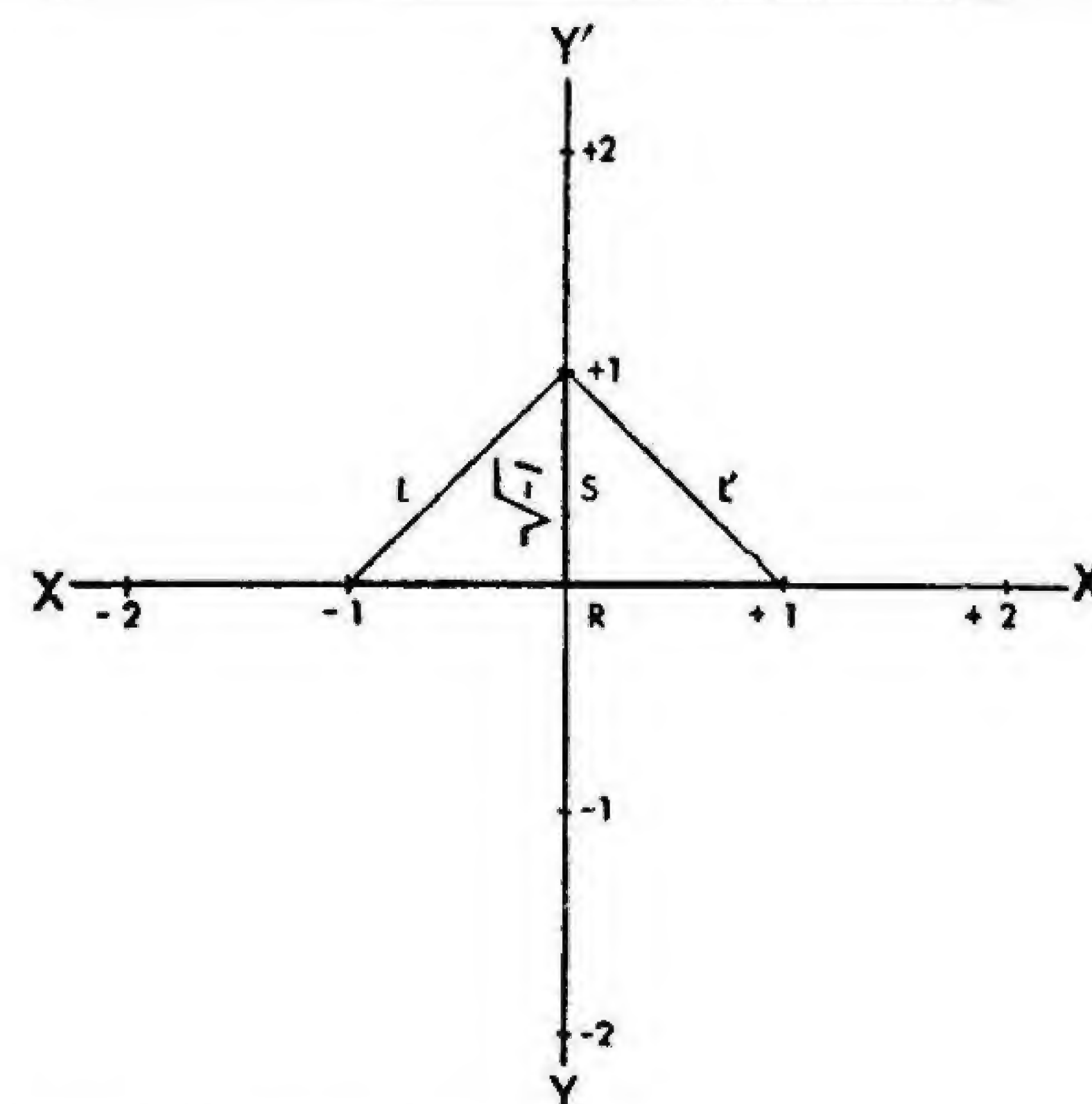


**Fig. 22(c).** Representación gráfica de la ecuación:  $y = e^x$ . Esta curva muestra la propiedad común a todos los fenómenos de crecimiento: la razón de crecimiento es proporcional al estado de crecimiento.



**Fig. 23.** Longitud  $AD = \sqrt{BD \times DC}$  = media geométrica de  $BD$  y  $DC$ .

parisiense, Argand, a fines del siglo XVIII y comienzos del XIX, descubrieron, independientemente, que los números imaginarios podían representarse aplicando este teorema. En la figura 24 la distancia  $S$ , desde el origen  $R$  hasta  $+1$ , es la me-



**Fig. 24.** Interpretación geométrica de  $i$ .

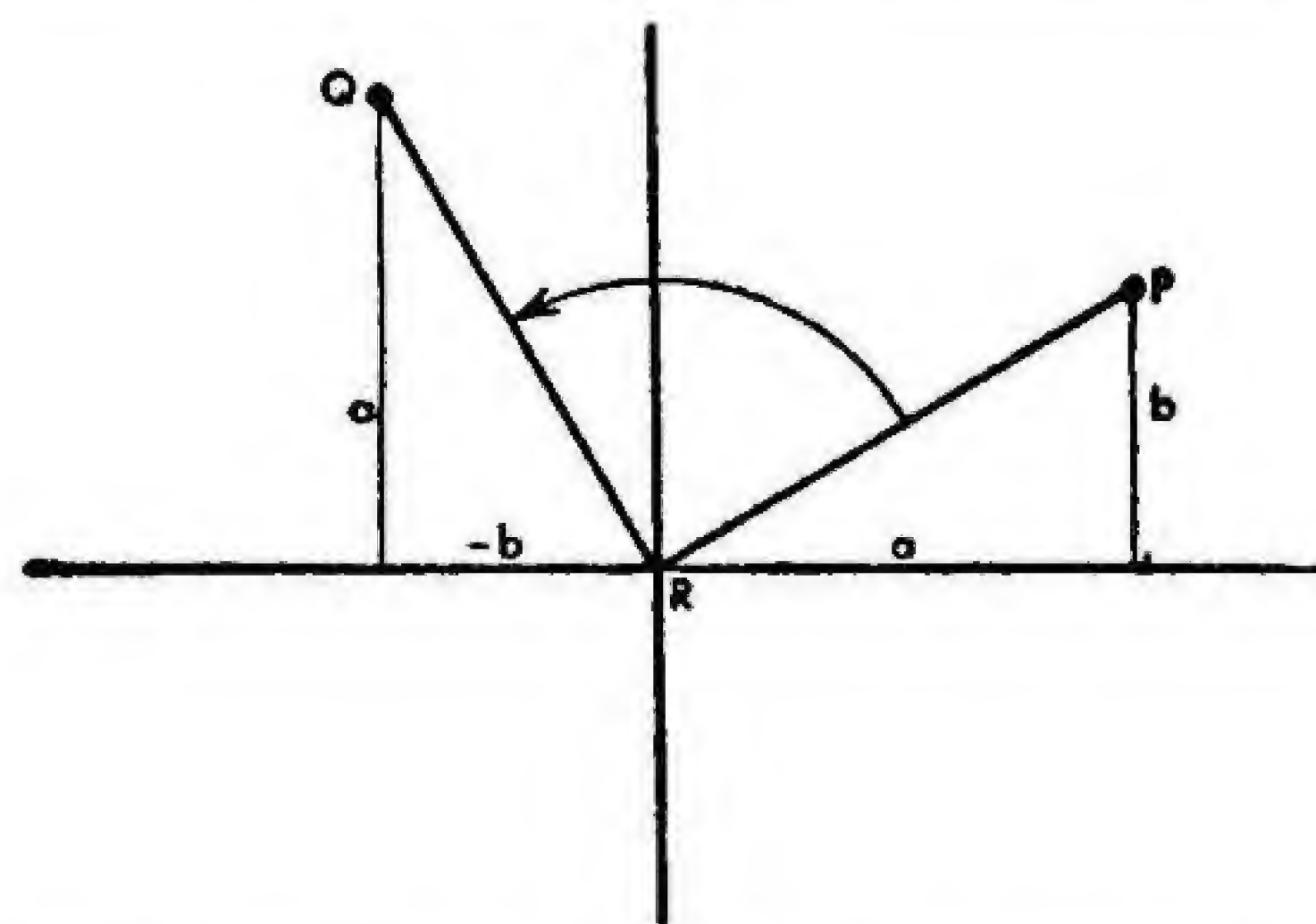


dia geométrica del triángulo de lados  $L$  y  $L'$ , y la base formada por aquella parte del eje  $xx'$  que va de  $-1$  a  $+1$ .

Luego,  $S = \sqrt{(-1) \cdot (+1)} = 1 \sqrt{-1} = i$ .

Así pues, tenemos ya una representación geométrica de un número imaginario.

Extendiendo esta idea, Gauss formó todo el plano complejo. En éste, cada punto representado por un número complejo de la forma  $x + iy$  corresponde al punto del plano determinado por las coordenadas  $x$  y  $y$ . En otras palabras, un número complejo puede ser considerado como un par de números reales, con el agregado del número  $i$ . El uso de  $i$  aparece solamente al efectuar las operaciones de multiplicación y división. Imagínese una recta que una el punto  $(a + ib)$  con el origen  $R$ . Entonces la operación de multiplicar por  $-1$  es



**Fig. 25.** La multiplicación por  $i$  es una rotación de  $90^\circ$ .

$$\begin{aligned} \text{Sea } P &= (a + ib), \\ \text{Entonces, } P \times i &= (a + ib) \times i \\ &= (a \times i) + (b \times i \times i) \\ &= ia + b \cdot -1 \\ &= -b + ia \\ &= Q. \end{aligned}$$

equivalente a hacer girar esa línea en  $180^\circ$ , alrededor del origen y a un cambio de posición del punto desde  $(+a + ib)$  hasta  $(-a - ib)$ . El efecto de multiplicar un número por  $i$  es tal que cuando se realiza dos veces, se obtiene  $i^2$ , lo cual es equivalente a la multiplicación por  $-1$ .

Por lo tanto, la multiplicación por  $i$  es una rotación de sólo  $90^\circ$ .

Los números complejos pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos como si fuesen números reales. Las reglas formales de estas operaciones (la más interesante de las cuales es la sustitución de  $-1$  por  $i^2$ ) se indican en los ejemplos que van a continuación:

- (1)  $x + iy = x' + iy'$  si y solamente si  $x = x'$  y  $y = y'$
- (2)  $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
- (3)  $(x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y')$
- (4)  $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$
- (5)  $(x + iy)/(x' + iy') = \left[ \frac{xx' + yy'}{(x')^2 + (y')^2} \right] + i \left[ \frac{yx' - xy'}{(x')^2 + (y')^2} \right]$

La figura 26 muestra los mismos puntos que en el plano dado en la figura 21 excepto que, para las coordenadas  $x$  y  $y$  de cada punto, hemos sustituido el número complejo correspondiente  $x + iy$ .

En virtud de las propiedades especiales de  $i$ , los números complejos pueden emplearse para representar, a un mismo tiempo, magnitud y dirección. Mediante ellos pueden representarse convenientemente algunas de las nociones más importantes de la física, tales como velocidad, fuerza, aceleración, etc.

Ya se ha dicho bastante para indicar la naturaleza de  $i$ , su finalidad e importancia en las matemáticas, su desafío y su victoria final sobre los principios arraigados del sentido común. Sin arredrarse ante su paradójica apariencia, los mate-



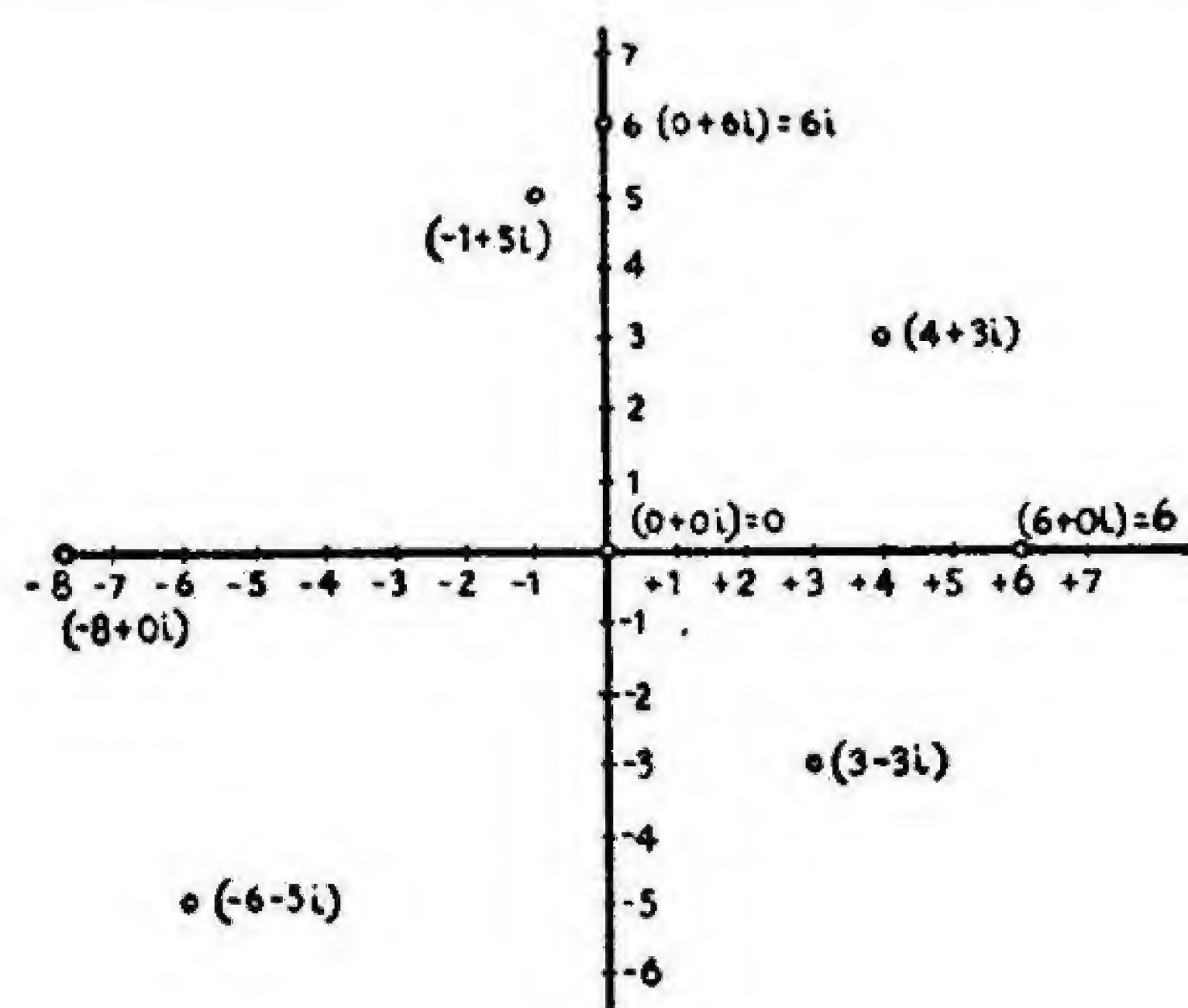


Fig. 26. El plano complejo.

máticos le usaron tal como lo habían hecho con  $\pi$  y  $e$ . El resultado fue el hacer posible la construcción de casi todo el edificio de la ciencia física moderna\*.

Falta una cosa. Hay una famosa fórmula —quizá la más breve y famosa de todas las fórmulas— desarrollada por Euler en base a un descubrimiento del matemático francés, De Moivre:  $e^{i\pi} + 1 = 0$ . Elegante, concisa y llena de significado, solamente podemos reproducirla sin detenemos a investigar sus complicaciones. Llama la atención tanto al místico como al hombre de ciencia, al filósofo como al matemático. Para

\* Demos este bálsamo al lector que nos ha acompañado tan valientemente a través de las páginas sobre geometría analítica y números complejos. El promedio de duración de un curso escolar de geometría analítica (sin incluir números complejos) es de seis meses. Es, por lo tanto, pretender demasiado que pueda aprenderse en casi cinco páginas. Por otra parte, si se ha fijado la idea básica de que todo número, toda ecuación de álgebra, pueden representarse gráficamente, los detalles horripilantes pueden dejarse a aventureros más intrépidos.

cada uno de ellos tiene su propio significado. Aunque era conocida hacía más de un siglo, la fórmula de De Moivre llegó como una revelación a Benjamín Peirce, uno de los matemáticos más sobresalientes de la Universidad de Harvard en el siglo XIX. Habiéndola descubierto un día, se dirigió a sus alumnos e hizo una observación que suple en calidad dramática y reconocimiento lo que pudiera faltarle en erudición y pedantería: “Caballeros”, dijo, “esto es sin duda cierto, es absolutamente paradójico, no podemos comprenderlo, y no sabemos lo que significa, pero lo hemos demostrado y, por lo tanto, sabemos que debe ser verdad”.

Cuando haya tanta humildad y tanta visión en todas partes, la sociedad será gobernada por la ciencia y no por los sabihondos.

## APÉNDICE

### Nacimiento de una curva

1. Consideremos la ecuación  $y = x^2$ . Tomemos unos pocos valores de prueba para  $x$  y hallemos los correspondientes valores de  $y$ , disponiendo los resultados en una tabla:

$x$	$y$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Es decir:  $2^2 = 4$ ,  $3^2 = 9$ , etc. Representando estos puntos en el plano cartesiano, obtenemos la figura A.



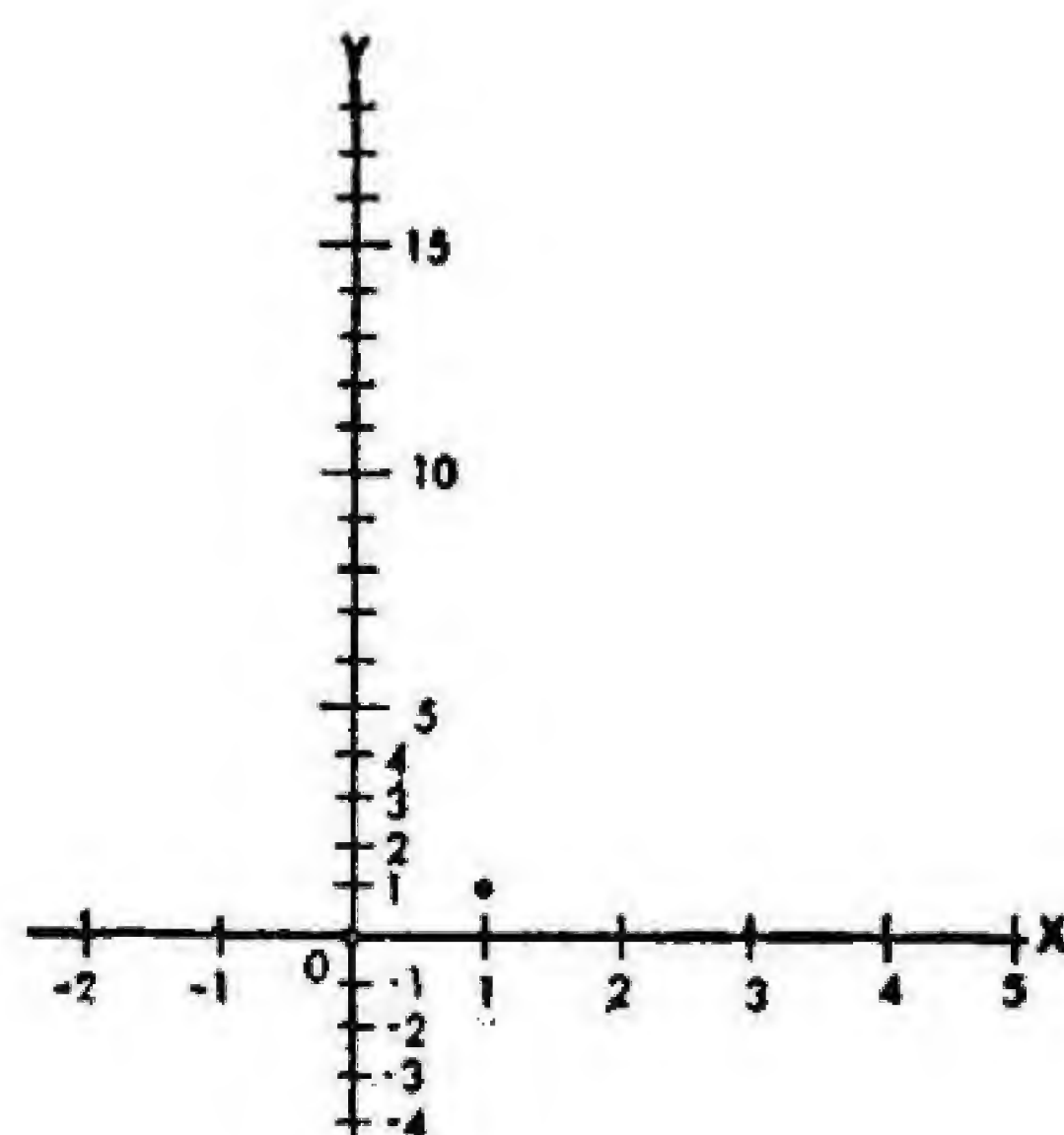


Fig. A

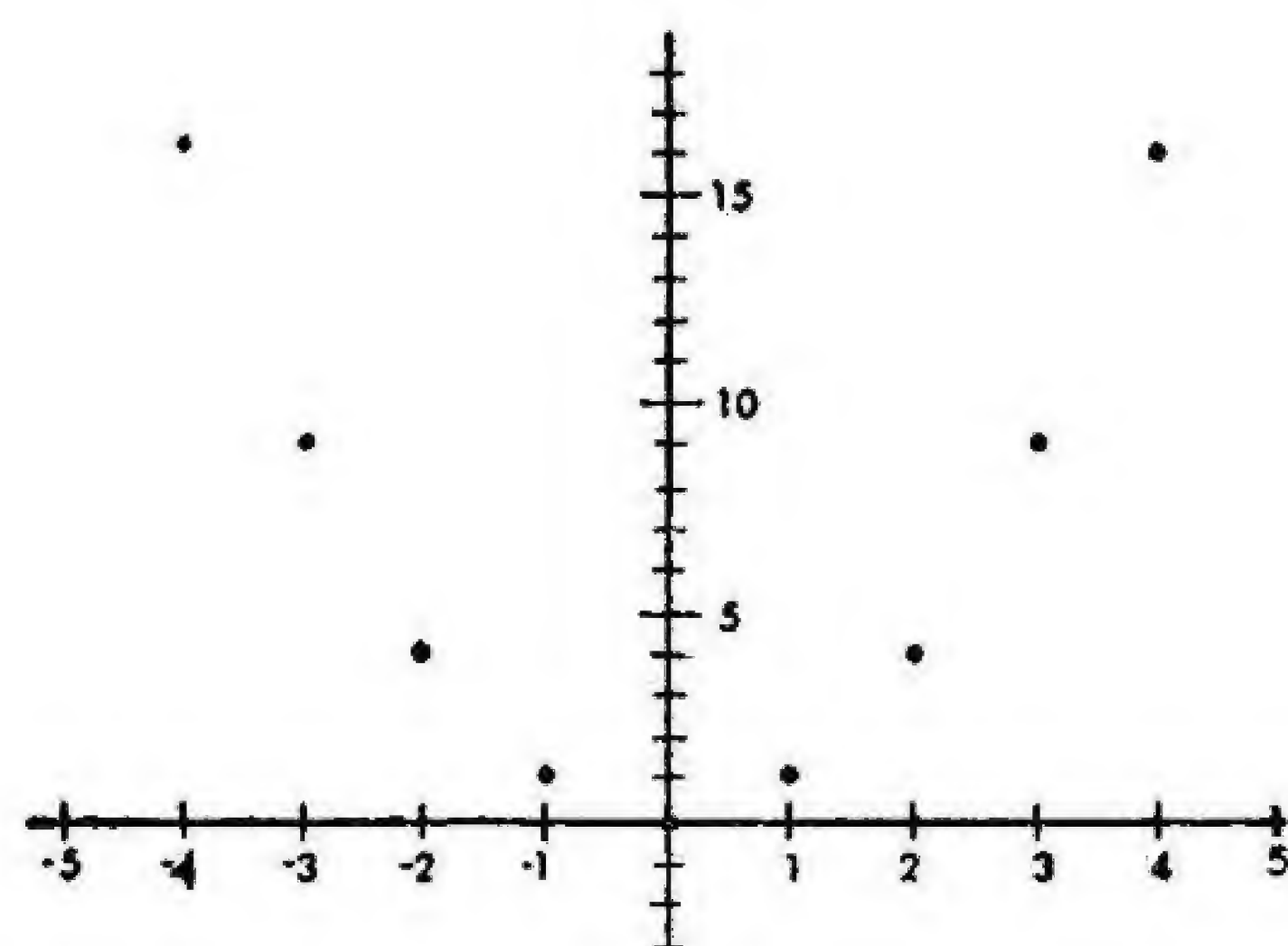


Fig. B

2. Ahora, ¿qué hacemos con respecto a los valores negativos de  $x$ ? Vemos por ejemplo  $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ . Esto es evidentemente cierto para todos los valores de  $x$ , de manera que a cada punto representado en la figura A, corresponde otro punto que es su imagen especular, siendo el espejo el eje  $OY$ . Agregando éstos sale la figura B.

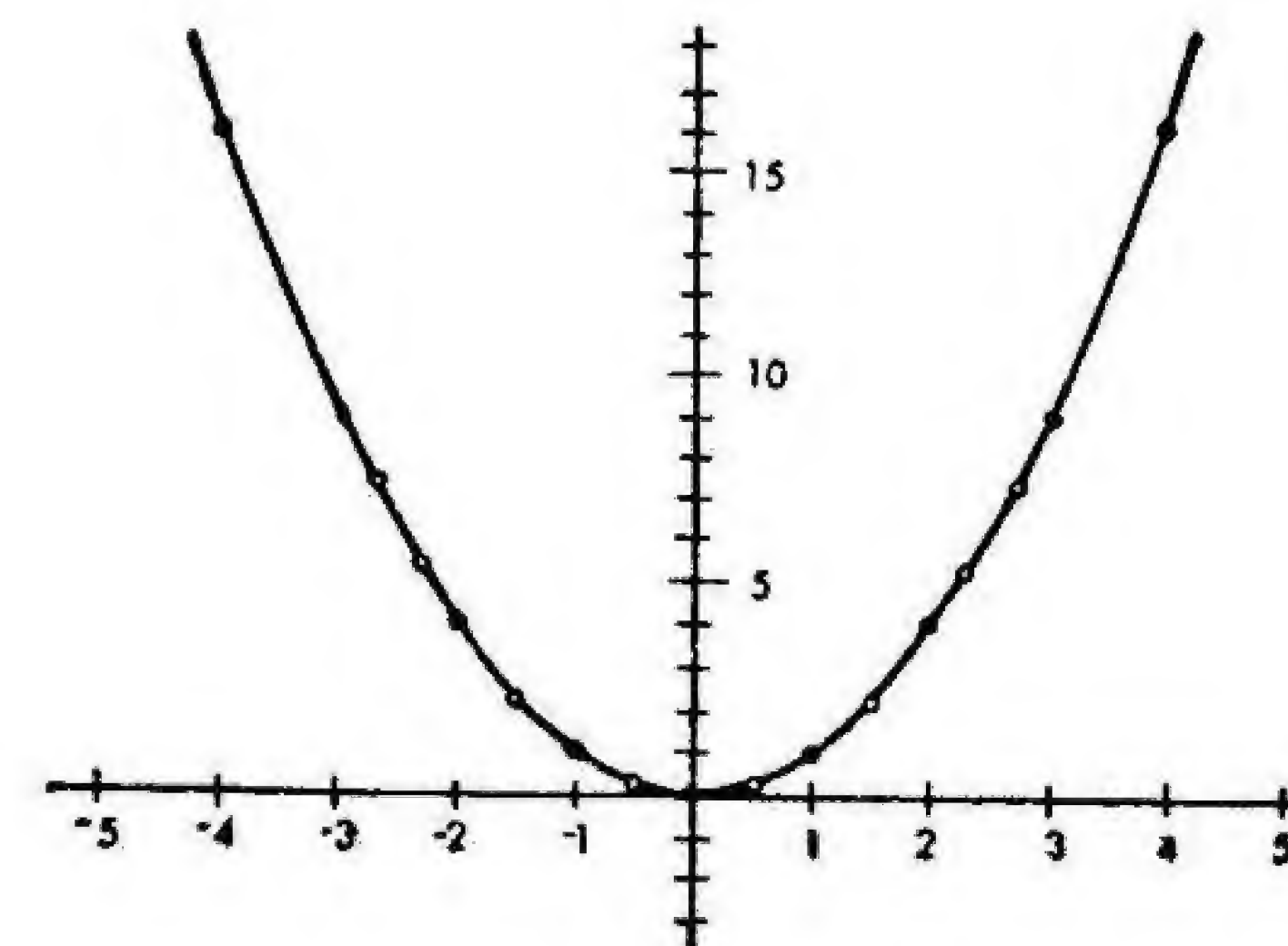


Fig. C

$x$	$y$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
2,3	5,29
2,7	7,29

3. La disposición de los puntos sugiere que dibujemos una curva lisa que pase por ellos (fig. C).

Pero, ¿contiene esta curva a otros puntos que aparecen en nuestra tabla funcional? Probémoslo, tabulando algunos valores fraccionarios de  $x$ .

Si graficamos estos nuevos puntos podrá verse que todos ellos pertenecen a la curva (fig. D). En efecto, si continuásemos así, encontraríamos que *todo* punto que pueda aparecer en la tabla pertenecerá a la curva. La totalidad de dichos puntos formará la curva conocida con el nombre de parábola.



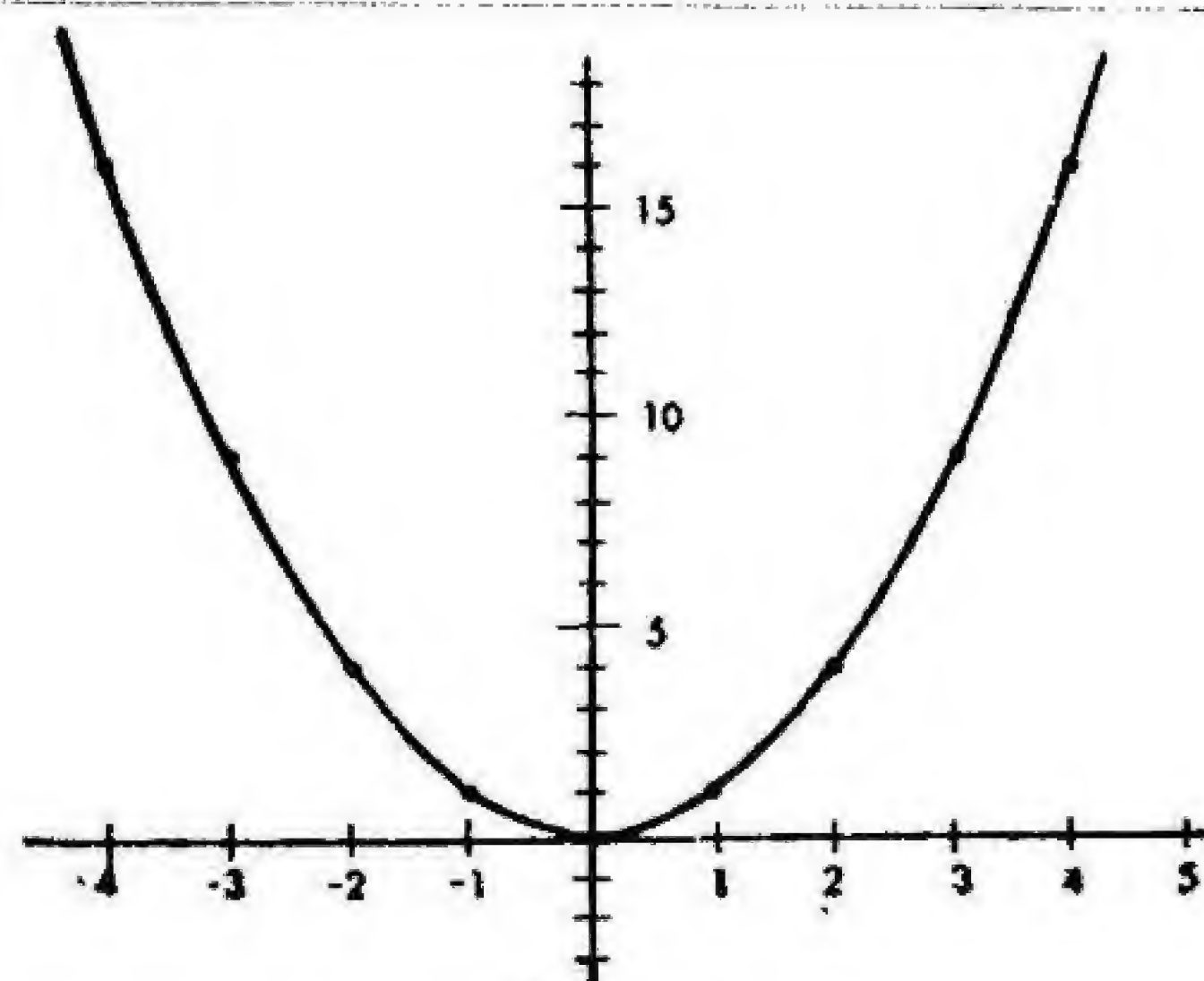
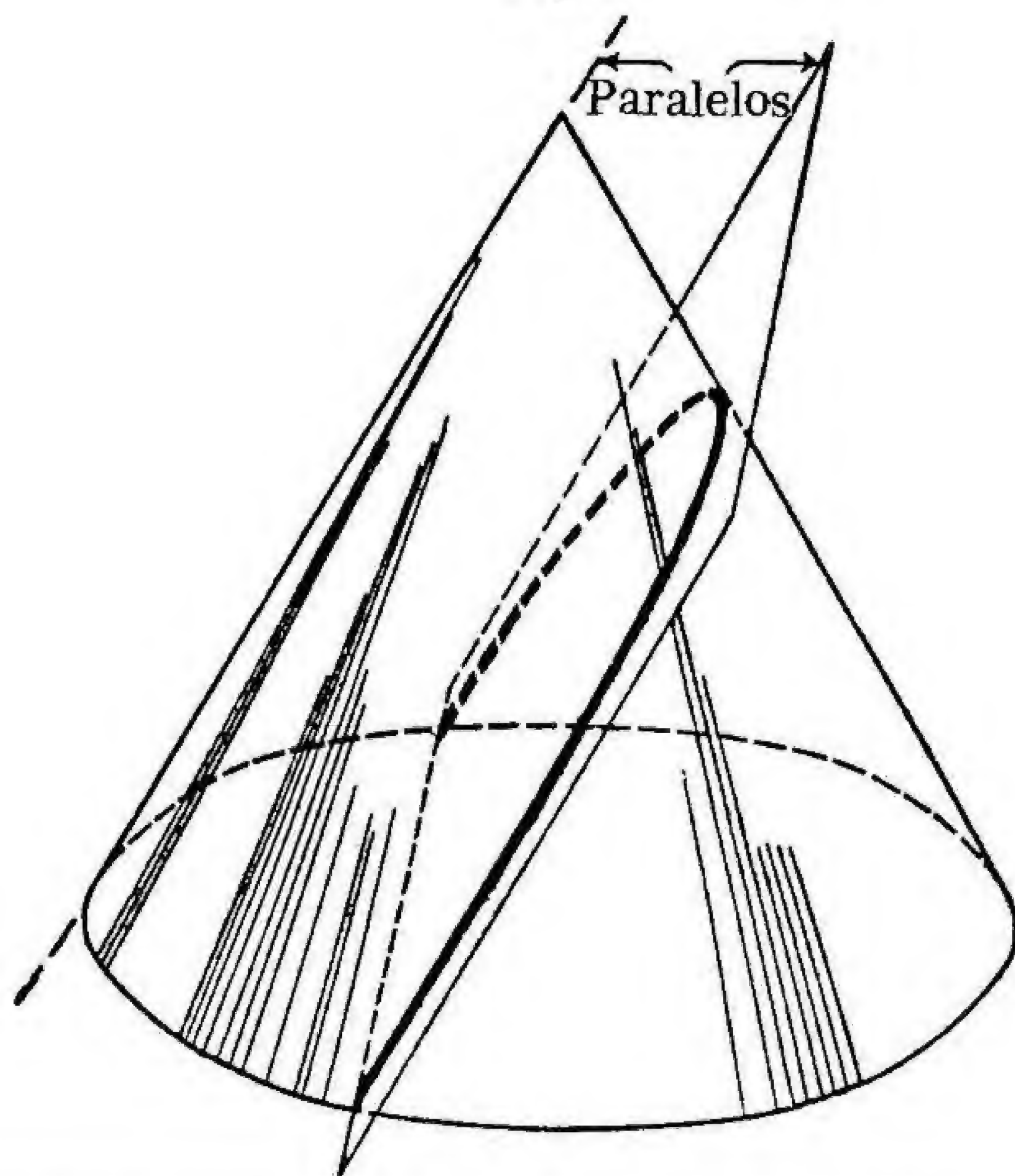
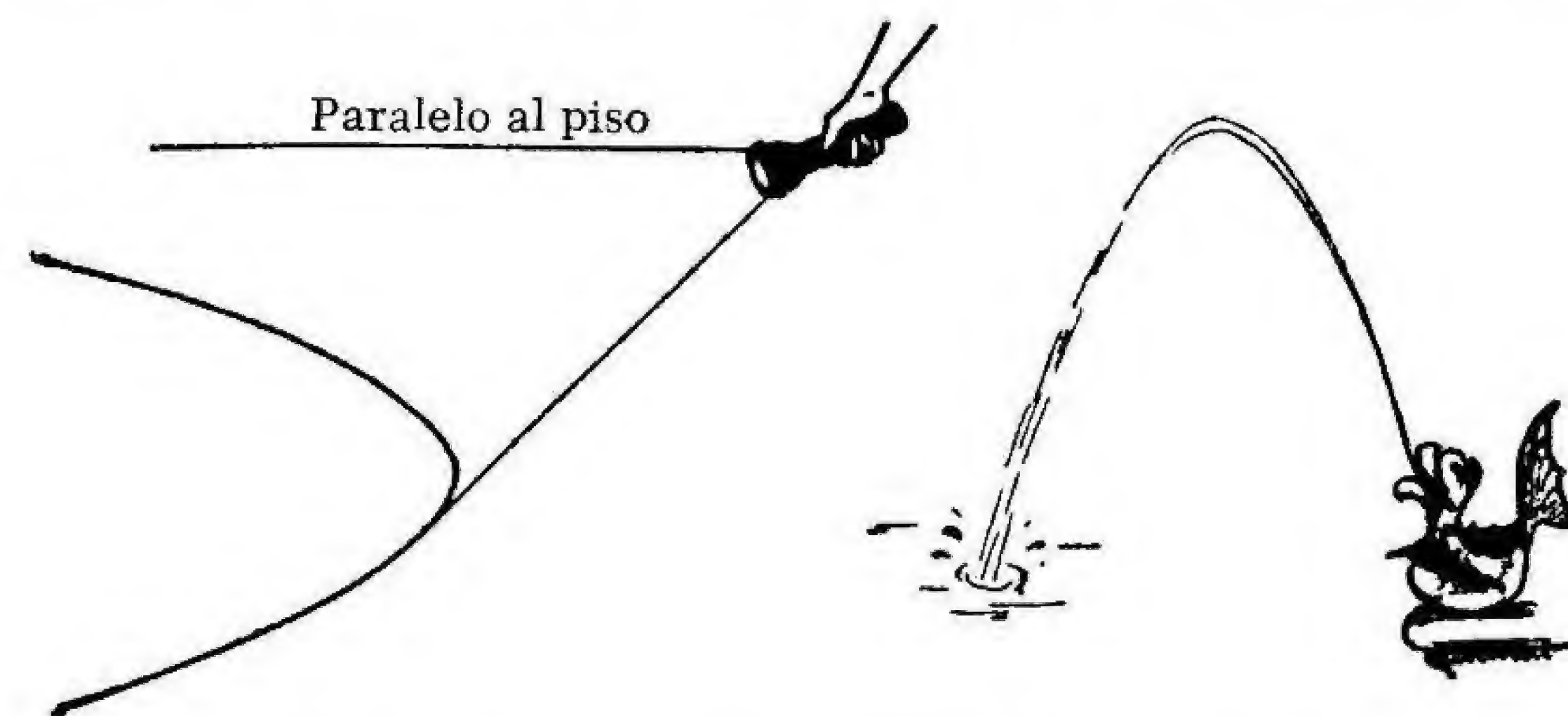


Fig. D



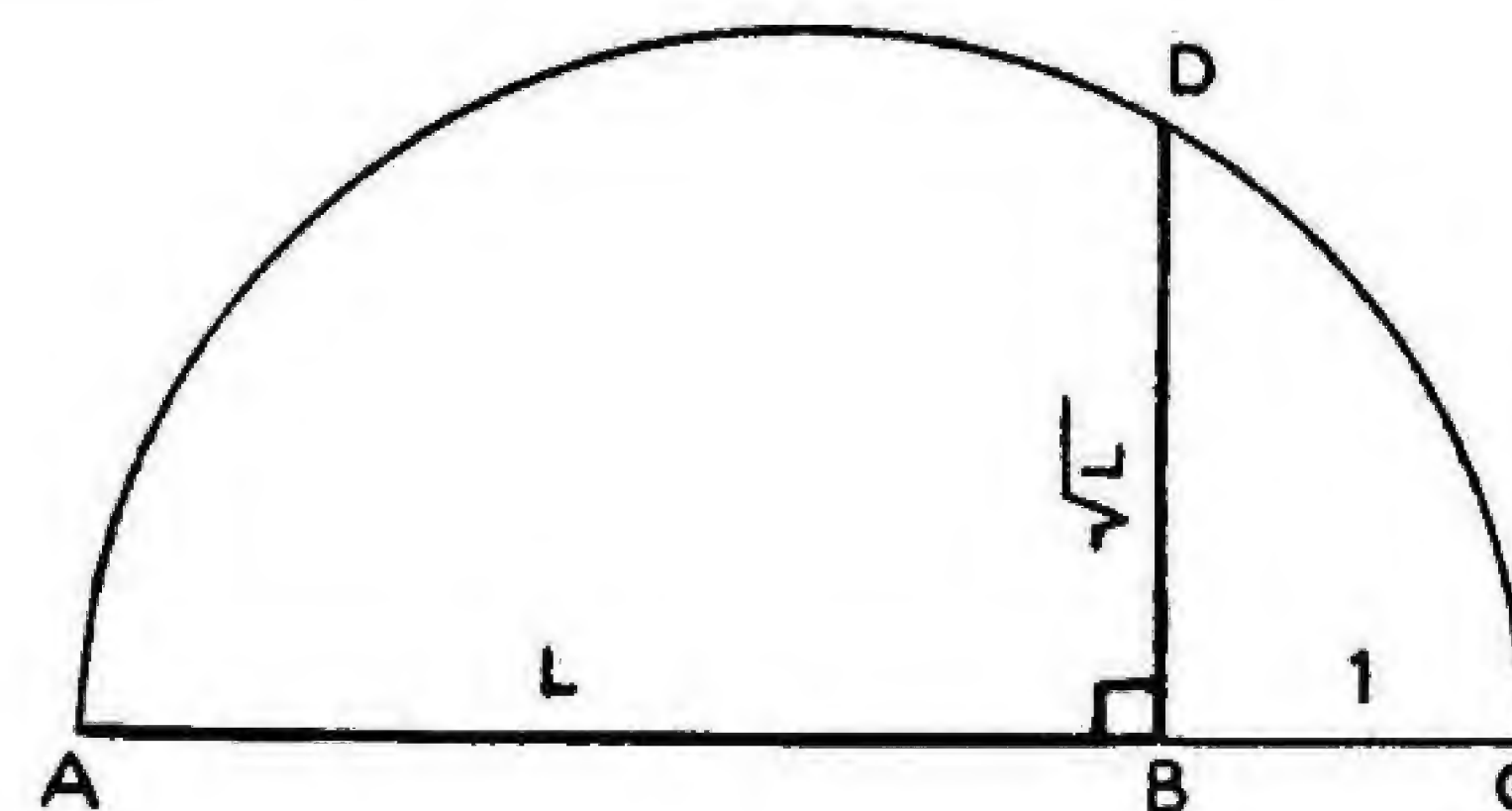
La parábola está formada por la sección de un cono cortado por un plano paralelo a la generatriz opuesta.



**Fig. E.** Se puede formar una parábola con una linterna sosteniéndola de modo que el límite superior del haz luminoso sea paralelo al piso. Un chorro de agua forma una parábola lo mismo que la trayectoria de un proyectil. Pero la curva formada por un trozo de cuerda, sostenida por sus extremos y que cuelga libremente, *no* es una parábola sino una *catenaria*.

#### NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1. Henri Bergson, *Evolución Creadora*. Página 67.
2. Es muy sencillo determinar geométicamente la raíz cuadrada de una longitud dada. Página 69.



**Fig. 27.** Sea  $AB$  la longitud dada. Extiéndasela hasta  $C$  de manera que  $BC = 1$ . Trácese un semicírculo cuyo diámetro sea  $AC$ . Levántese una perpendicular por  $B$ , la cual cortará al semicírculo en  $D$ . El segmento  $BD$  es la raíz cuadrada de  $L$  requerida.



3. Gauss hizo un estudio completo para determinar qué otros polígonos podían construirse con regla y compás. Los griegos habían podido construir polígonos regulares de 3 y de 5 lados, pero no los de 7, de 11 ó de 13 lados. Gauss, con maravillosa precocidad, dio la fórmula que demostró cuáles polígonos se podían construir de la manera clásica. Se había creído que sólo podían construirse así los polígonos regulares cuyo número de lados podía expresarse como  $2^n$ ,  $2^n \times 3$ ,  $2^n \times 5$ ,  $2^n \times 15$  (donde  $n$  es un número entero). La fórmula de Gauss demuestra que los polígonos con un número primo de lados pueden construirse de la siguiente manera. Sean  $P$  el número de lados y  $n$  cualquier número entero hasta 4; luego:  $P = 2^{2^n} + 1$ . Si  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $P = 3, 5, 17, 257, 65537$ . Donde  $n$  es mayor que 4, no hay números primos conocidos de la forma  $2^{2^n} + 1$ .

(Un número primo es aquel que sólo es divisible por sí mismo o por el uno. De este modo, 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17 son ejemplos de números primos. Una famosa prueba de Euclides, que aparece en sus *Elementos* demuestra que el número de números primos es infinito. (Véase nota n.º 21 del capítulo V.)

Es un hecho verdaderamente sorprendente que de todos los polígonos posibles, cuyo número de lados es un número primo, solamente los cinco ya indicados pueden construirse con regla y compás. Página 71.

4. Ver capítulo V. Página 71.

5. Hace muchísimo tiempo, en el año 1775, la Academia de París estaba tan abrumada con pretendidas soluciones de la cuadratura del círculo, de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo, que aprobó una resolución prohibiendo, para lo sucesivo, la aceptación de las mismas. Pero en esa época sólo se sospechaba la imposibilidad de estas soluciones, pues aún no se la había demostrado matemáticamente; de este modo, el arbitrario proceder de la Academia sólo puede explicarse en base a su propia conservación. Página 71.

6. Para calcular  $\pi$  se emplearon, como pronto veremos, procesos de límites y de convergencia con un infinito número de pasos. Página 72.

7. Véase el capítulo sobre el Cálculo infinitesimal. Página 72.

8. La mayor parte de las series infinitas son *divergentes*, es decir, la suma de la serie supera a cualquier número entero prefijado. Una típica serie divergente es:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} +$

$+\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ . Esta serie parece diferir muy poco de la serie convergente dada en el texto, y únicamente las más sutiles operaciones matemáticas revelan si una serie es *convergente* o *divergente*. Página 72.

9. Puede duplicarse un cuadrado dibujando otro cuadrado cuyo lado sea la diagonal del primero, pero no puede duplicarse un cubo, porque esta operación involucra la raíz cúbica de 2, y ésta, al igual que  $\pi$ , no es raíz de una ecuación algebraica de primero o segundo grado y, por lo tanto, no puede construirse con regla y compás. En el espacio de cuatro dimensiones, la figura que corresponde al cubo, llamada "tesseract" (v. cap. IV), puede duplicarse con regla y compás, porque la raíz cuarta de 2, que es la que se requiere, puede escribirse como la raíz cuadrada de la raíz cuadrada de 2. Página 74.

10. ¿Qué significa "la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros"? Una palabra es suficiente para estimular la memoria de aquellos que han pasado por un curso de álgebra elemental. La raíz de una ecuación es el valor por el que debe sustituirse la incógnita a fin de satisfacer la ecuación. Así, en la ecuación:  $x - 9 = 0$ , la raíz es 9, ya que si usted reemplaza 9 en lugar de  $x$ , la ecuación se satisface. Análogamente -4 y 4 son las raíces de la ecuación:  $x^2 - 16 = 0$ , porque cuando cualquiera de los dos valores sustituye a  $x$ , la ecuación se cumple. Las ecuaciones "algebraicas" constituyen el tipo de ecuaciones de las que nos hemos ocupado hasta ahora. Pero hay también ecuaciones trigonométricas, diferenciales y otras. El término "algebraico" tiene por finalidad distinguir ecuaciones de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Los coeficientes de una ecuación son los números que aparecen delante de la cantidad o cantidades desconocidas. En la ecuación:

$$3x^4 + 17x^3 + \sqrt{2}x^2 - ix + \pi = 0$$

5, 17,  $\sqrt{2}$ ,  $i$  y  $\pi$  son los coeficientes. Éste es un ejemplo de una ecuación algebraica con coeficientes extraños. Al definir una ecuación algebraica (v. pág. 50) se exige que  $n$  sea un número entero positivo y que las  $a$  sean números enteros. Página 75.

11. Véase el Problema de la aguja, de Buffon, en el capítulo VII. Página 82.

12. La  $\sqrt{2}$  cuando se escribe en forma decimal es tan complicada como  $\pi$ , debido a que nunca se repite, nunca termina y no existe ley conocida que indique la sucesión de sus dígitos, sin embargo, este complicado decimal puede obtenerse fácilmente y con exactitud mediante una construcción hecha con regla y compás, pues es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad. Página 83.

13. Jobst Bürgi, de Praga, había preparado tablas de logaritmos antes que apareciese la obra *Descriptio* de Napier. Sin embargo recién en 1620, Bürgi publicó sus tablas pues, como él mismo lo explicó, se hallaba ocupado en la solución de otro problema. Página 84.

14. De acuerdo al principio de la notación posicional, el valor de un dígito depende de su posición con relación a los otros dígitos del número en el cual aparece. Página 84.

15. Las reglas para operar con exponentes en la multiplicación y en la división son:

#### A. Multiplicación

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n} \text{ así o} \\ a^5 \times a^3 &= a^{5+3} = a^8, \text{ o,} \\ a^3 \times a^5 &= (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^8 \end{aligned}$$

#### B. División

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ \frac{a^5}{a^2} &= a^{5-2} = a^3 \end{aligned}$$

Pero si  $m$  es igual a  $n$ ,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^0 = ?$$

$$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = ?$$

$$\frac{a^5}{a^5} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = 1$$

Por lo tanto, convenimos en que:

$$a^0 = 1 \text{ Página 86}$$

16. Debido a que  $e$  posee ciertas propiedades únicas, valiosas en muchas ramas de las matemáticas, particularmente en el cálculo, debido a la relación existente entre las funciones logarítmicas y las exponenciales,  $e$  es la base "natural" del sistema logarítmico. Página 88.

17. La primera demostración de que  $e$  es trascendente (es decir, que no es la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros) fue dada por Hermite, el distinguido matemático francés, en 1873, nueve años antes de que Lindemann demostrara el carácter trascendente de  $\pi$ . Desde entonces, otros matemáticos lograron simplificar la demostración de Hermite. El método general consiste en "suponer que  $e$  sea la raíz de una ecuación algebraica,  $f(e) = 0$ , y demostrar que puede elegirse un factor  $M$  tal que, cuando cada miembro de la ecuación se multiplica por  $M$  (el valor de)  $Mf(e)$  queda reducido a la suma de un número entero distinto de cero y un número comprendido entre 1 y 0, demostrando que la suposición de que  $e$  puede ser la raíz de una ecuación algebraica es insostenible". Véase U. G. Mitchell and M. Strain, en *Osiris, Studies in History of Science*, vol. 1. Página 88.



18 El símbolo  $!$  tal como se usa en matemáticas no indica sorpresa o excitación, aunque en este caso no estaría fuera de lugar, ya que la simplicidad y belleza de esta serie es sorprendente.  $!$  significa "tomar el factorial del número detrás del cual aparece  $!$ ". El factorial de un número es el producto de sus componentes, así  $1! = 1$ ,  $2! = 1 \times 2$ ,  $3! = 1 \times 2 \times 3$ ,  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ . Página 88.

19 En realidad sólo es necesario que  $n$  sea igual a 1 000 (esto es, el interés se calcula tres veces por día) para dar \$2.72. Página 91.

20 La derivada de  $y = e^x$  es igual a la función misma. Para una discusión más completa de la derivada y de los problemas que implican razón de crecimiento véase el capítulo sobre Cálculo. Página 92.

21 Omar Khayyám, además de ser el autor del usado "Rubáiyát" fue también un distinguido matemático, pero su visión fracasó para los números negativos. Página 95.

22 Traducido en Dantzig, *Number, the Language of Science* (New York, Macmillan), 1933, p. 190. Página 97.

23 En una oportunidad se sugirió que los símbolos adecuados para las constantes,  $e$  e  $i$  deberían ser  $\varrho$  para  $e$ , y  $\varphi$  para  $i$  a fin de evitar confusiones. Pero los impresores se resistieron a hacer los nuevos tipos y los viejos símbolos prevalecieron. Más a menudo de lo que pudiera creerse, consideraciones de esa naturaleza determinaron el carácter de la notación matemática. Página 98.

## IV. OTRAS GEOMETRÍAS: EL PLANO Y LA FANTASÍA

*Dicen que el hábito es la segunda naturaleza. ¿Quién sabe si la naturaleza es sólo el primer hábito?*

PASCAL

Entre nuestras más caras convicciones, ningunas tan preciosas como nuestras creencias acerca del espacio y del tiempo. Ningunas, sin embargo, más difíciles de explicar. El pez parlante del cuento de los hermanos Grimm se habría visto en grandes dificultades para explicar cómo se sentía al estar continuamente mojado, no habiendo experimentado nunca el placer de estar seco. Nosotros tenemos dificultades análogas al hablar del espacio, por no saber qué es ni cómo sería no estar en él. El espacio y el tiempo son "demasiado nuestros" para desprendernos de ellos y describirlos objetivamente.

"Porque, ¿qué es el tiempo?", preguntaba san Agustín. "¿Quién puede explicarlo fácil y brevemente? ¿Quién, aun con el pensamiento, puede concebirlo, aun pronunciando una palabra referente a él? Pues, ¿a qué cosa, en el habla, nos referimos más familiarmente y con conocimiento de causa que al tiempo? Y por cierto que lo entendemos al hablar de él; lo comprendemos también cuando oímos que otro habla de él. Entonces, ¿qué es el tiempo? Si nadie me lo pre-



gunta, lo sé. Si deseo explicarlo a quien me lo pregunta, no lo sé<sup>1</sup>."

Y esto también podría decirse del espacio. Aunque el espacio no puede ser definido, hay poca dificultad para medir distancias y superficies, para desplazarse, para hacer cartografías de grandes extensiones, o en ver a través de millones de años luz. Por todas partes está la abrumadora evidencia de que el espacio es nuestro medio natural, que no nos presenta problemas insuperables.

Pero este libro no pretende ser un tratado filosófico, ni tampoco un *Manual de Introducción a la Teoría del Espacio*, escrito en alemán en 14 volúmenes. Nuestro propósito consiste en explicar de la manera más sencilla y general, no el espacio físico que perciben nuestros sentidos, sino el espacio del matemático. A tal fin, todas las nociones preconcebidas deben desecharse y aprender de nuevo el alfabeto.

En este capítulo nos proponemos discutir dos clases de geometrías: las de cuatro dimensiones y las no-euclidianas. Ninguno de estos temas va más allá de la comprensión del no matemático que esté dispuesto a realizar un razonamiento correcto. Es verdad que ambos temas han sido descritos, como la teoría de la relatividad (con la que en cierto modo se relacionan) en forma de un arrogante espantajo. Los sumos sacerdotes de toda profesión idean complicados rituales y lenguaje oscuro, tanto para ocultar su propia ineptia como para infundir terror a los no iniciados. Pero la corrupción del clero no debe desanimarnos. Las ideas básicas sobre las que se fundan las geometrías de cuatro dimensiones y no euclidianas son sencillas y esto es lo que nos proponemos demostrar.

Euclides, al escribir los *Elementos*, no tropezó con grandes obstáculos. Partiendo de ciertas ideas fundamentales (presumiblemente entendidas por todos) y que expresó como

postulados y axiomas, creó su geometría sobre ellas, utilizándolas como cimientos. Este método, ideal para desarrollar un sistema lógico, jamás ha sido mejorado, aunque a veces ha sido descuidado u olvidado, con tristes consecuencias.

Si bien los *Elementos* de Euclides constituyen una importante realización intelectual, tienen el defecto de no hacer una importante distinción entre dos tipos de matemáticas —*puras y aplicadas*—, distinción que sólo ha salido a la luz en los modernos desarrollos teóricos en las matemáticas, la lógica y la física.

Una geometría que trate del espacio de nuestra experiencia, es matemática *aplicada*. Si nada dice de ese espacio, si, en otras palabras, es un sistema compuesto de nociones abstractas, elementos y clases, con reglas de combinación que obedecen a las leyes de la lógica formal, es matemática *pura*. Sus proposiciones son de la forma: "Si *A* es cierto, entonces *B* es cierto", haciendo caso omiso de lo que *A* y *B* puedan ser<sup>2</sup>. Si fuese aplicable al mundo físico un sistema de matemáticas puras, el provecho que se obtuviera podría ser considerado, ya como simple casualidad, ya como prueba más amplia de la profunda conexión existente entre las formas de la naturaleza y las de las matemáticas. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos debe tenerse presente este hecho esencial, a saber, que la fecundidad de un sistema lógico ni aumenta ni disminuye su validez.

Como matemática aplicada, la geometría de Euclides es una buena aproximación dentro de un campo restringido. Suficientemente buena para dibujar un plano de Madrid; deja de serlo para un mapa de España o de Europa, o para la medida de las distancias atómicas o estelares. Como sistema de matemáticas puras, sus proposiciones son verdaderas en el sentido más general. Es decir, tienen validez únicamente como proposiciones lógicas, si han sido deducidas correctamente de los axiomas. Son, por lo tanto, posibles, otras



geometrías con postulados diferentes —en realidad tantas como al matemático se le ocurra idear. Todo lo que se necesita es reunir ciertas ideas fundamentales (clases, elementos, reglas de combinación), declarar los conceptos indefinibles, garantizar que los axiomas no se contradicen, y se habrán fundado los cimientos para un nuevo edificio: una nueva geometría. Al matemático puro no le importa un ápice si esta nueva geometría será provechosa, si resultará ser tan útil para el agrimensor o el navegante como la geometría euclídea, o si sus ideas fundamentales están a la altura de cualquier otra norma de verdad que no sea la compatibilidad consigo misma. El matemático es el sastre de la clase media de la ciencia. Confecciona los trajes, y a quienes les queden bien, que los usen. Dicho en otras palabras: el matemático hace las reglas del juego y quien lo desee puede jugar mientras las observe. No tiene derecho a quejarse luego alegando que el juego no le haya dejado utilidades.

Si deseamos hacer el máximo cumplido a un sistema matemático, expresar que participa de la misma generalidad y de la misma validez que la lógica, podemos llamarlo “juego”. Una geometría de cuatro dimensiones es un juego, como también lo es la Geometría de Euclides. Poner reparos a la geometría de cuatro dimensiones basándose en que solamente hay tres dimensiones, es absurdo. El ajedrez puede ser jugado tanto por quienes creen en camaradas o dictadores, como quienes se adhieren a la gloria, languideciente, de reyes y reinas. ¿Qué sentido tiene, pues, oponer reparos al ajedrez fundándose en que reyes y reinas pertenecen a épocas pasadas y que, sea como fuere, nunca se comportaron como piezas de ajedrez —no, ni siquiera los obispos\*? ¿Qué

\* Juego de palabras con el doble significado de *bishop*, que quiere decir *alfil* u *obispo*, indistintamente. (N. del T.)

valor tiene entonces el argumento de que el ajedrez es un juego ilógico, porque es imposible concebir que un ciudadano cualquiera pueda ser coronado reina por el solo hecho de avanzar cinco pasos?

Tal vez éstos son ejemplos ridículos, pero no lo son más que las exigencias del pusilánime que dice que las tres dimensiones hacen el espacio y que el espacio hace las tres dimensiones, “eso es todo lo que vosotros sabéis sobre la Tierra y todo cuanto necesitáis saber”. Porque no hay demostración, de carácter científico, de que el espacio sea de tres dimensiones o, para el caso, de cuatro, cinco, seis o de  $n$  dimensiones. La geometría considerada como matemática *pura* no puede demostrar que el espacio sea de tres dimensiones porque a la matemática *pura* sólo le interesa su coherencia lógica interna, y no su compatibilidad con el espacio o cualquier otra cosa. Ni tampoco es esta cuestión de la incumbencia de las matemáticas aplicadas, que generalmente no investigan la naturaleza del espacio, sino que suponen su existencia. Todo cuanto hemos aprendido de las matemáticas aplicadas es: resulta conveniente, pero no obligatorio, considerar al espacio de nuestra percepción sensorial como de tres dimensiones.

Al reparo de que una cuarta dimensión está más allá de la imaginación, podemos responder que lo que hoy es sentido común, ayer era razonamiento abstruso —más aún, especulación descabellada. Para que el hombre primitivo imaginara la rueda o un vidrio de ventana, se hubieran requerido mayores esfuerzos de imaginación que para nosotros concebir una cuarta dimensión.

Alguien podría todavía aducir: “Usted me dice que la geometría de cuatro dimensiones es un juego. Quiero creerlo. Pero parece ser un juego al que no le interesa nada real, sino algo que jamás he experimentado.” Le responderíamos a la manera socrática, con otra pregunta: “Si una geometría



de cuatro dimensiones no trata de nada real, entonces ¿qué estudia la geometría plana de Euclides? ¿Algo más real? ¡Por cierto que no! No describe el espacio accesible a nuestros sentidos, que explicamos en términos de vista y tacto. Habla de puntos que no tienen dimensión, de línea que no tiene anchura y de planos que carecen de espesor —abstracciones e idealizaciones todas ellas que en nada se parecen a cuanto hemos experimentado o encontrado.

La noción de una cuarta dimensión, aunque precisa, es muy abstracta y, para la gran mayoría, está más allá de la imaginación y en la región más pura del conocimiento. El desarrollo de esta idea es debido, en mucho, a nuestro relativamente pueril deseo de compatibilidad que a algo más profundo. En este mismo empeño por la compatibilidad y la generalidad, los matemáticos crearon los números negativos, los imaginarios y los trascendentes. Sin embargo, nadie había visto nunca menos tres vacas o la raíz cuadrada de menos un árbol, y no fue sin lucha como estos conceptos, hoy más bien vulgares, fueron introducidos en las matemáticas. El mismo conflicto se repitió para introducir la cuarta dimensión y todavía quedan escépticos en el campo de la oposición.

Se propusieron todas las alegorías y ficciones posibles para instar y halagar a los que dudaban, a fin de hacer más aceptable la idea de una cuarta dimensión. Hubo novelas que describían cuán imposible parecía un mundo de tres dimensiones a seres que vivieran en un mundo de dos dimensiones, hubo cuentos de aparecidos, de golpecitos en la mesa y del país de los muertos. Para ganar siquiera una victoria parcial hacían falta ejemplos de la tierra de los vivos, que eran, todavía, menos comprensibles que una cuarta dimensión. De esto no debe inferirse que se adoptó un absurdo mayor para sostener otro menor.

Comenzando, como es usual, con Aristóteles, se demostró muchas veces que una cuarta dimensión era inconcebible e imposible. Tolomeo señaló que podían trazarse en el espacio tres rectas perpendiculares entre sí, pero una cuarta recta, perpendicular a ellas, carecería de medida o profundidad. Otros matemáticos, no deseando arriesgarse a cometer una herejía mayor aún que la de ir contra la Biblia —esto es, contradecir a Euclides— advirtieron que ir más allá de las tres dimensiones equivalía a ir “contra la naturaleza”. Y el matemático inglés John Wallis, de quien podría haberse esperado algo mejor, se refirió a esa “fantasía” de una cuarta dimensión, como un “monstruo en la naturaleza, menos posible que una quimera o un centauro”.

Inconscientemente, un filósofo, Henry More, vino a redimirlo, aunque los matemáticos de hoy difícilmente reconocerían su ayuda. Su sugerencia no fue una bendición pura. Los espíritus de los aparecidos, dijo More, tienen, con toda seguridad, cuatro dimensiones. Pero Kant asestó un golpe terrenal al formular sus nociones intuitivas sobre el espacio, las cuales difícilmente podían ser compatibles, ni con una geometría de cuatro dimensiones ni con una no euclidiana.

En el siglo XIX varios matemáticos sobresalientes defendieron esta causa en apariencia, perdida, y abrieron un nuevo manantial matemático. La gran memoria de Riemann titulada *Sobre las hipótesis que sustentan los fundamentos de la Geometría*, conjuntamente con las obras de Cayley, Veronese, Möbius, Plücker, Sylvester, Bolyai, Grassmann, Lobachevsky, crearon una revolución en la geometría. La geometría de cuatro y de aún más dimensiones, llegó a ser una parte indispensable de las matemáticas, relacionadas con muchas otras ramas.

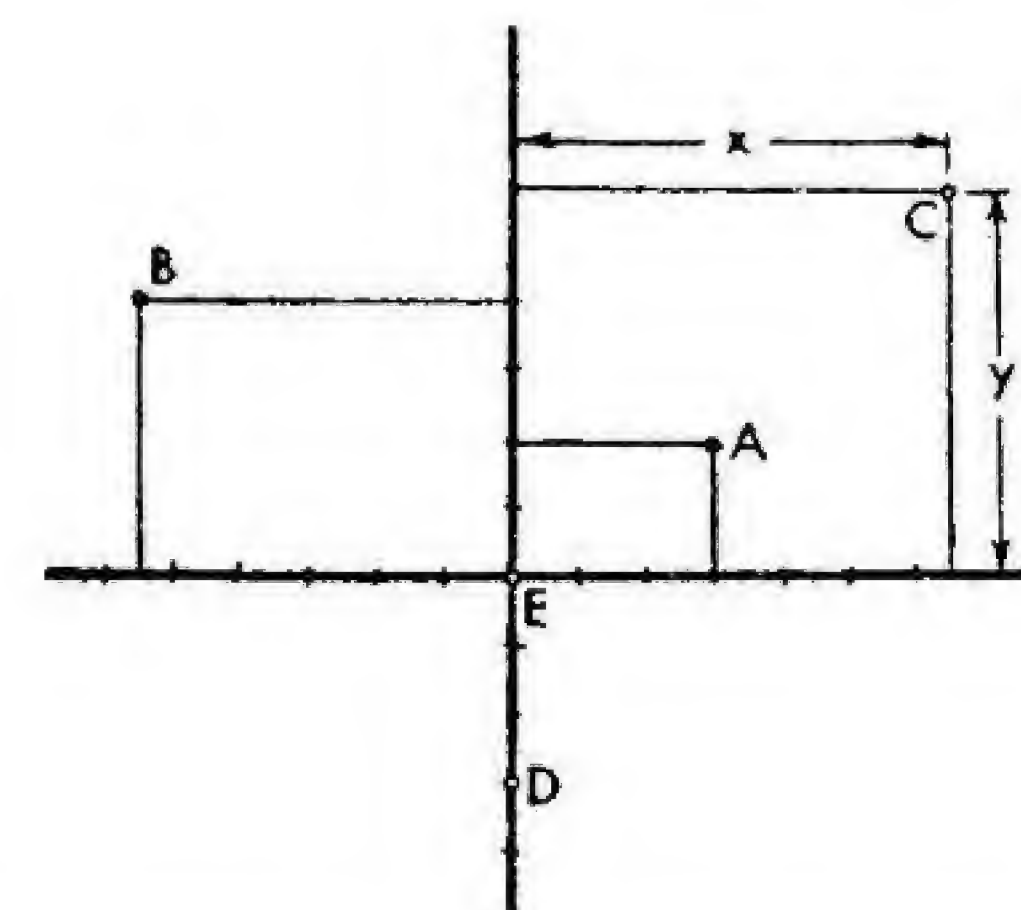
Fue cuando finalmente llegaron a la física matemática, al mundo físico (por alguna razón misteriosa que nunca falta) los usos y aplicaciones directas de la geometría de cuatro di-



mensiones cuando el niño abandonado fue de pronto reconocido y rebautizado. "¡El tiempo es la cuarta dimensión!" El gozo hizo rebosar la copa. Se dijeron cosas curiosas y maravillosas. La cuarta dimensión resolvería todos los tremendos misterios del Universo y, en última instancia, podría resultar una cura para la artritis. A tal punto se perdieron los matemáticos en el júbilo general, que algunos de ellos comenzaron a hablar de "la cuarta dimensión", como si en lugar de ser simplemente una idea salida de las puntas de sus lápices, sólo la cuarta en una clase de infinitas posibilidades, fuese una realidad física, como un nuevo elemento. De este modo, una lamentable confusión se propagó desde las matemáticas hasta la gramática, desde los principios del  $2 + 2$  hasta la ciencia de los usos correctos del artículo definido e indefinido.

Los físicos pueden considerar que el tiempo es una cuarta dimensión, pero no así el matemático. El físico, como otros hombres de ciencia, puede encontrar que su máquina más reciente tiene, precisamente, el lugar adecuado para algún nuevo artificio matemático; eso no le interesa al matemático. El físico puede apropiarse de nuevas partes para su máquina cambiante, todos los días, tomándolas de las matemáticas. Si se adaptan, el físico dice que son útiles, que son verdaderas, porque hay un lugar para ellas en el modelo de su mundo en preparación. Cuando ya no le sirven, puede descartarlas o "destruir toda la máquina y construir una nueva, del mismo modo que nosotros compramos un automóvil nuevo cuando el viejo deja de marchar bien"<sup>3</sup>.

La costumbre de decir que el tiempo es una *dimensión* hace ver la necesidad de explicar qué significa esa impertinente palabra. De esta manera, también llegaremos a tener una imagen más clara de la geometría de cuatro dimensiones.



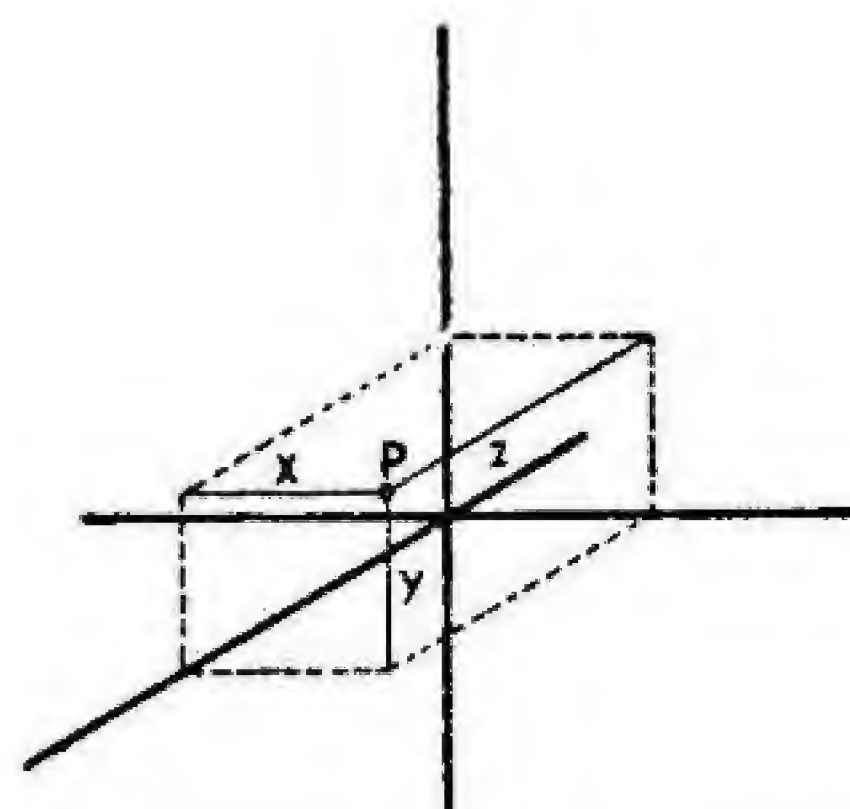
**Fig. 28(a).** Una variedad de dos dimensiones. Cada punto requiere un par de números para ser individualizado:

$$\begin{aligned} A &= (3, 2) \\ B &= \left(-5\frac{1}{2}, 4\right) \\ C &= (x, y) \\ D &= (0, -3) \\ E &= (0, 0) \end{aligned}$$

En lugar de referimos a "un espacio" o a "espacios", usaremos un término más general y más de moda: *variedad*<sup>4</sup>. Una variedad tiene una semejanza aproximada con un conjunto. Un plano es un conjunto compuesto por todos aquellos puntos determinados únicamente por dos coordenadas. Es, por lo tanto, una variedad de dos dimensiones.

El espacio estudiado en la geometría analítica de tres dimensiones puede considerarse como una variedad de tres dimensiones, porque se requieren exactamente tres coordenadas para fijar cada punto en él. Generalizando, si se necesitan  $n$  números para especificar, para individualizar, cada uno de los miembros de una variedad, ya sea un espacio o cualquier otra clase, se les denomina una variedad de  $n$  dimensiones.





**Fig. 28(b).** El mismo concepto puede hacerse extensivo a una variedad de tres dimensiones (espacio). Cada punto requiere tres números para ser individualizado. Así,  $P = (x, y, z)$ .

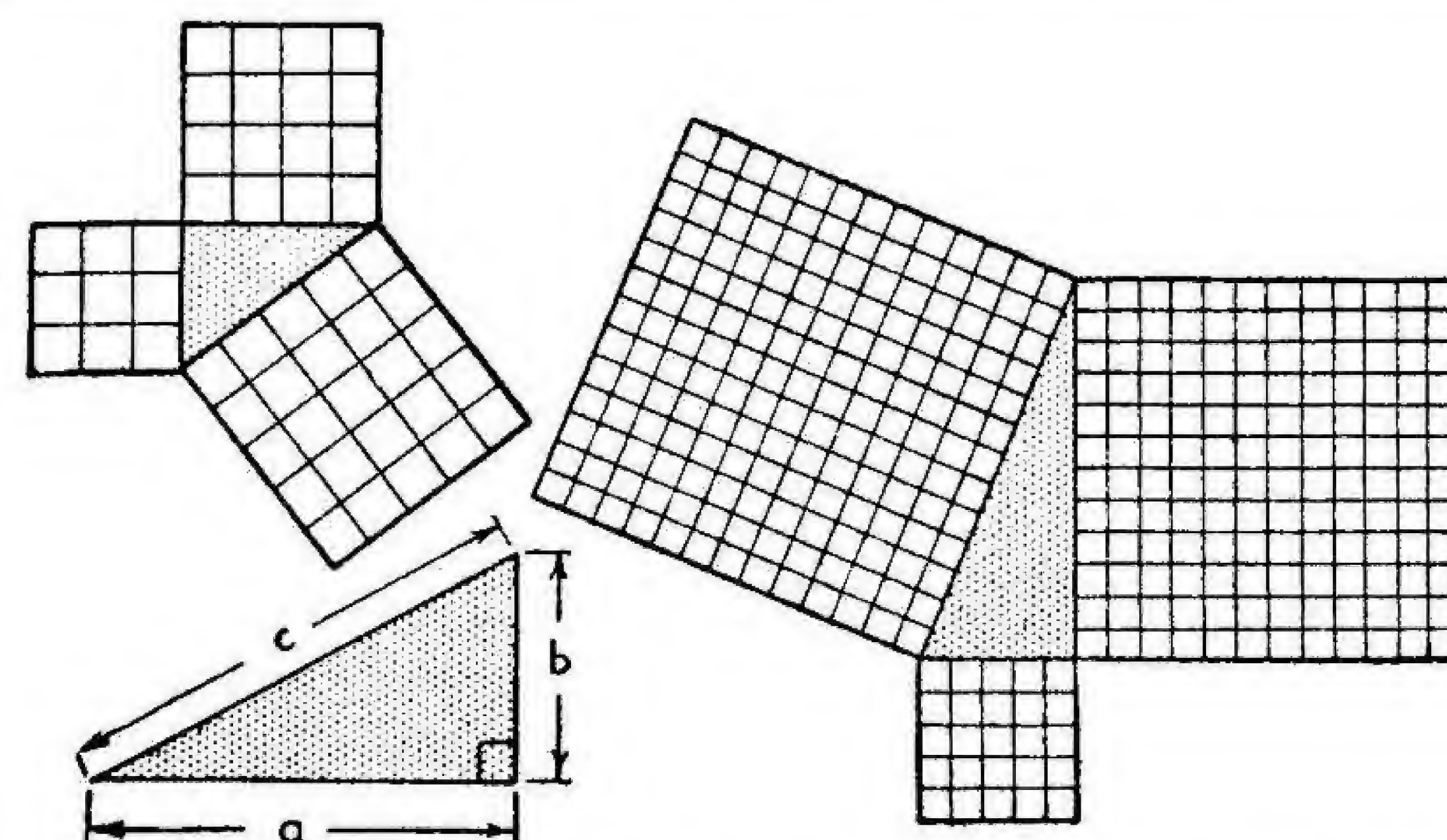
De este modo, la palabra *dimensión*, con sus muchas connotaciones misteriosas e incrustaciones lingüísticas, ha sido sustituida por una idea sencilla —la de *coordenada*. Y en lugar de la palabra física *espacio*, el matemático introduce el concepto más general y más exacto, de *clase* o *variedad*.

Ahora es posible, como consecuencia de estos refinamientos, introducir un concepto ya conocido desde nuestro estudio de la geometría analítica y que servirá para caracterizar de manera única las variedades del espacio. Para ello utilizaremos un razonamiento geométrico.

El teorema de Pitágoras establece que, en un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.

Cuando esto se traslada a la geometría analítica de dos dimensiones, resulta la conocida fórmula de acuerdo a la cual, la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano, de coordenadas  $(x, y)$  y  $(x', y')$ , respectivamente, es  $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .

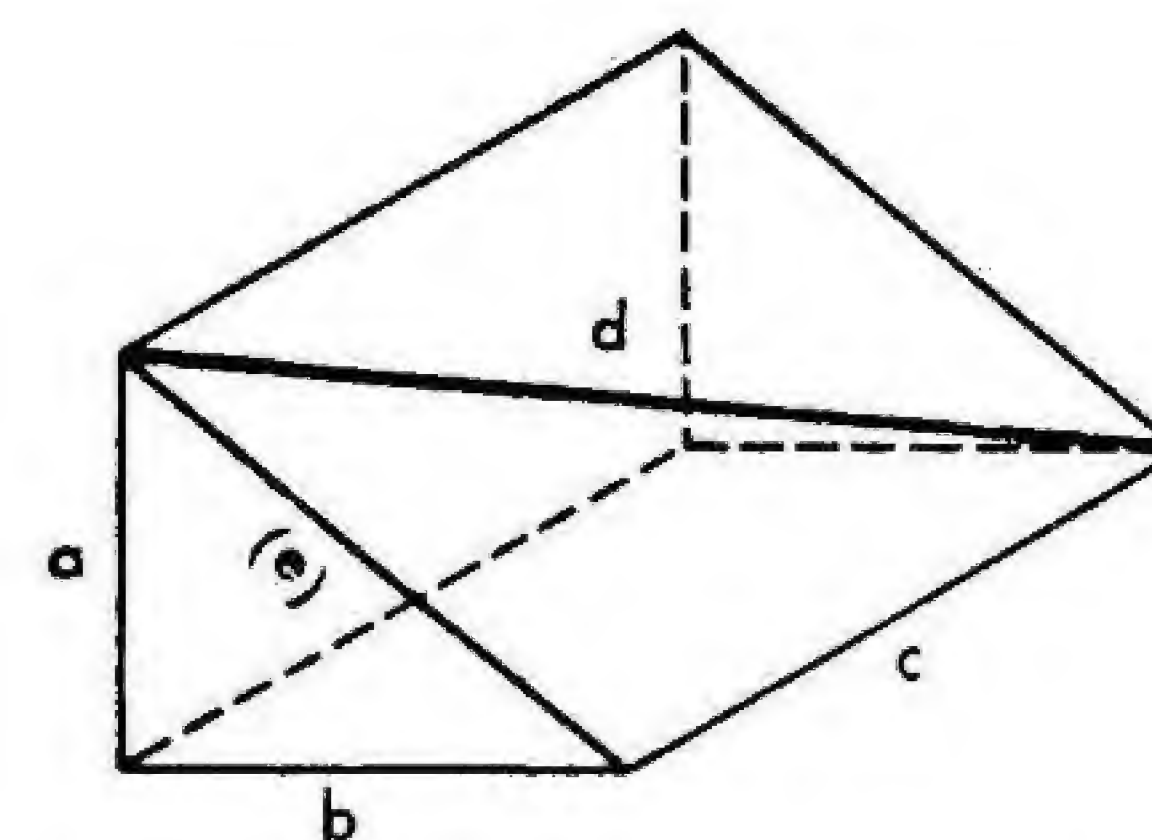
Análogamente, en la geometría analítica de tres dimen-



**Fig. 29.** El teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

o sea  $5^2 = 3^2 + 4^2$   
 $13^2 = 12^2 + 5^2$

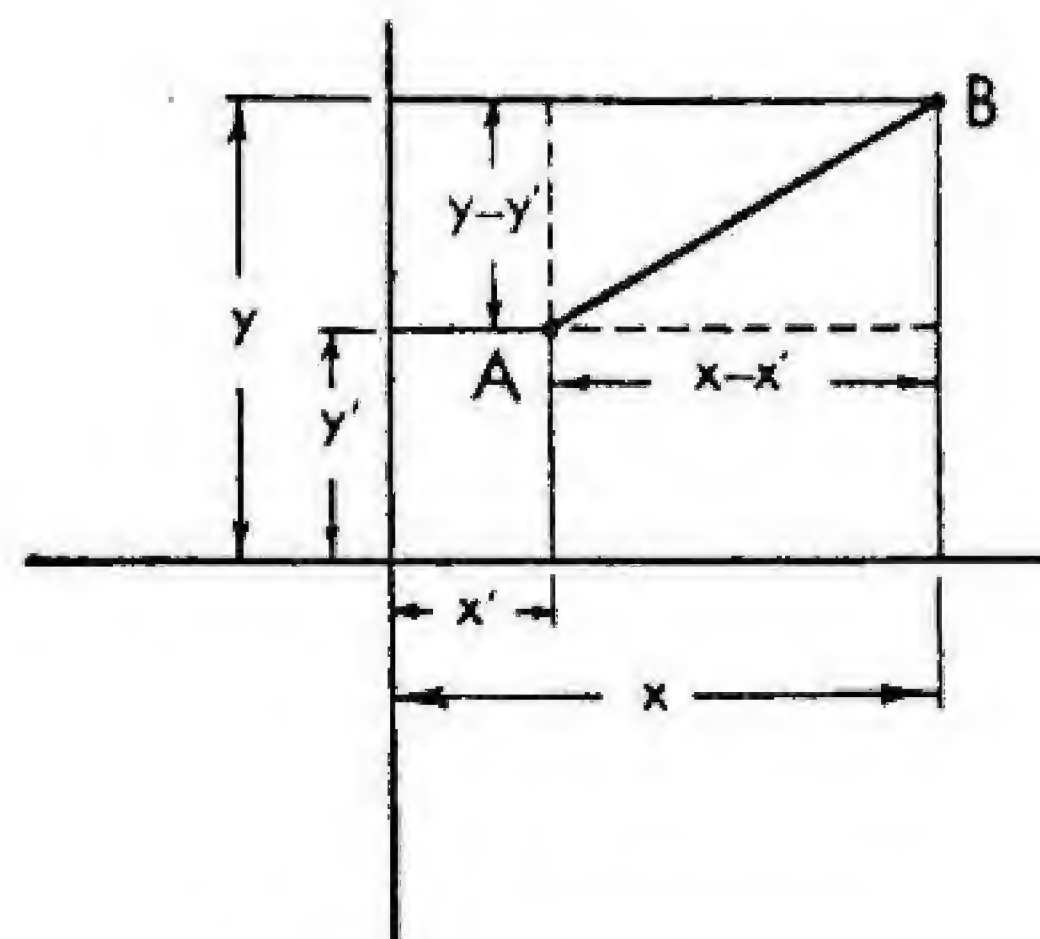


**Fig. 30.** El teorema de Pitágoras en tres dimensiones:

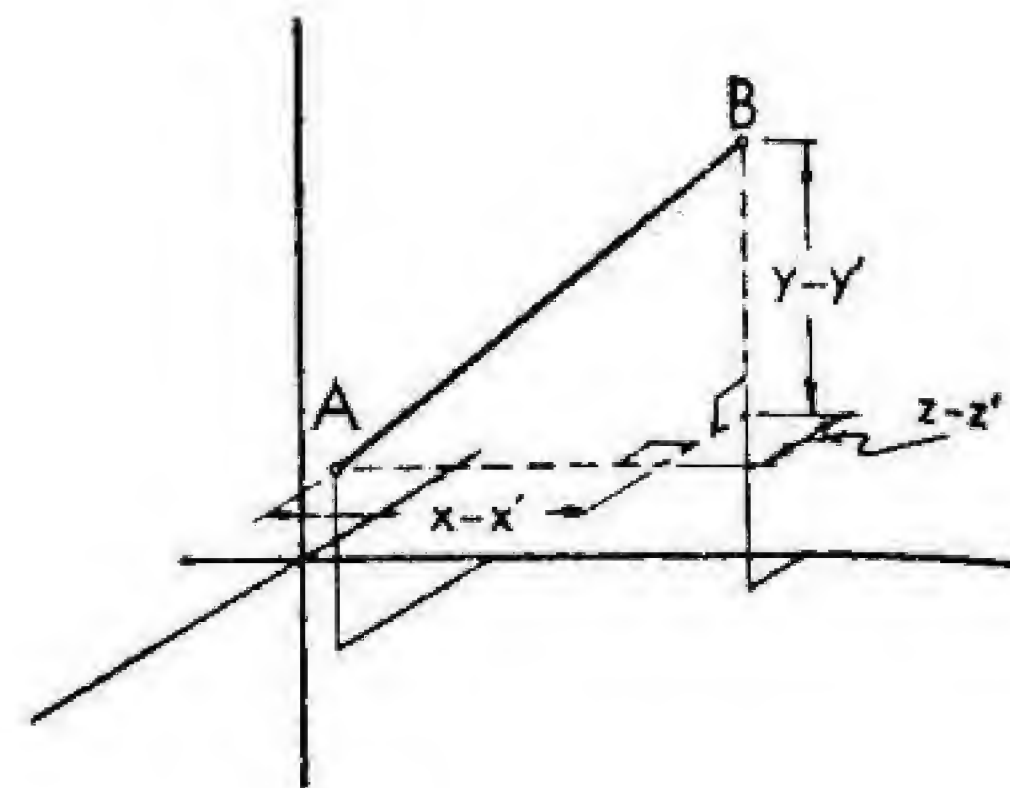
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Pues:  $d^2 = c^2 + (e)^2$   
 y  $(e)^2 = a^2 + b^2$





(1) Dos dimensiones.



(2) Tres dimensiones

Fig. 31

- (1) Distancia  $AB = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$   
 (2) Distancia  $AB = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

siones, la distancia entre dos puntos cualesquiera, de coordenadas  $(x, y, z)$ , y  $(x', y', z')$  respectivamente, es:

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Ahora bien, tanto en dos como en tres dimensiones el concepto de distancia, en la forma en que el matemático y el lego lo entienden, es el mismo. El lego queda satisfecho con un entendimiento intuitivo, el matemático exige una formulación exacta. Sin embargo, en las dimensiones superiores, mientras el lego queda detenido por un muro infranqueable —las limitaciones naturales de sus sentidos— el matemático escala esa pared utilizando su fórmula ampliada, como escalera. La distancia en cuatro dimensiones nada significa para el lego. Y es lógico que así sea, puesto que un espacio de cuatro dimensiones está totalmente fuera de la imaginación ordinaria. Pero el matemático, que asienta el con-

cepto sobre una base enteramente distinta, no tiene la obligación de luchar con los límites de la imaginación, sino solamente con las limitaciones de sus facultades lógicas.

Por consiguiente, no hay razón para no generalizar la fórmula anterior a 4, 5, 6... ó  $n$  dimensiones. De este modo, en una variedad euclidiana de cuatro dimensiones, la distancia de un elemento, por ejemplo, el punto de coordenadas  $(x, y, z, u)$ , a otro elemento de coordenadas  $(x', y', z', u')$  es:

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + (u-u')^2}$$

Este método nos permite definir, en términos de la geometría analítica, una variedad euclidiana de 2, 3, 4... ó  $n$  dimensiones. Una definición análoga puede darse para las variedades de otras geometrías, en cuyo caso se aplicaría alguna otra fórmula para la distancia. Hemos elegido la geometría analítica y tomado la fórmula pitagórica de la distancia para distinguir las variedades euclidianas.

Una definición abreviada de las variedades de tres y cuatro dimensiones, en términos de la geometría analítica, reza así<sup>5</sup>.

1. Una variedad euclidiana de tres dimensiones es el conjunto de todas las ternas de números:  $(x, y, z)$   $(x', y', z')$ ,  $(x'', y'', z'')$ , etc., a dos cualesquiera de las cuales puede asignarse de manera única una *medida* llamada distancia entre ellos, definida por la fórmula:  $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ . Ciertos subconjuntos de este conjunto se denominan puntos, rectas, planos, etc. Los teoremas deducidos de estas definiciones constituyen un sistema matemático llamado "Geometría Analítica de Tres Dimensiones".

2. Una variedad euclidiana de cuatro dimensiones es la clase de todas las tétradas de números  $(x, y, z, u)$   $(x', y', z', u')$   $(x'', y'', z'', u'')$ , etc., a dos cualesquiera de las cuales puede



asignarse de manera única una *medida* (llamada distancia entre ellos), definida por la fórmula:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + (u - u')^2}$$

Ciertas subclases de esta clase se denominan puntos, rectas, planos e *hiperplanos*. La geometría analítica euclidiana de cuatro dimensiones es el sistema formado por los teoremas que se deducen de estas definiciones.

Nótese que nada se ha dicho, en ambas definiciones, acerca del espacio de nuestras percepciones sensoriales, ni del espacio del físico, ni el espacio del filósofo. Todo cuanto hemos hecho es definir dos sistemas matemáticos que son lógicos y compatibles consigo mismos, que pueden ser jugados como el juego de damas o las charadas, de acuerdo con reglas establecidas. Quienquiera que encuentre una semejanza entre su juego de damas o sus charadas y la realidad física de su experiencia tendrá el privilegio de extraer moralejas, y aprovechar sus sugerencias.

Pero habiendo establecido que estamos en el reino de los conceptos puros, más allá de los límites más elásticos de la imaginación, ¿quién queda satisfecho? Incluso el matemático desearía dar un mordisco a la fruta prohibida, vislumbrar qué le parecería si pudiese, por un instante, introducirse en una cuarta dimensión.

Para empeorar las cosas, los libros de ciencia popular han hecho todo tan ridículamente simple —relatividad, la teoría cuántica, y tantas otras cosas— que estamos avergonzados de nuestra incapacidad para describir una cuarta dimensión como algo más concreto que el tiempo.

Se han intentado representaciones gráficas de figuras de cuatro dimensiones, pero no puede decirse que estos esfuerzos hayan sido coronados de éxito. La figura 31 representa

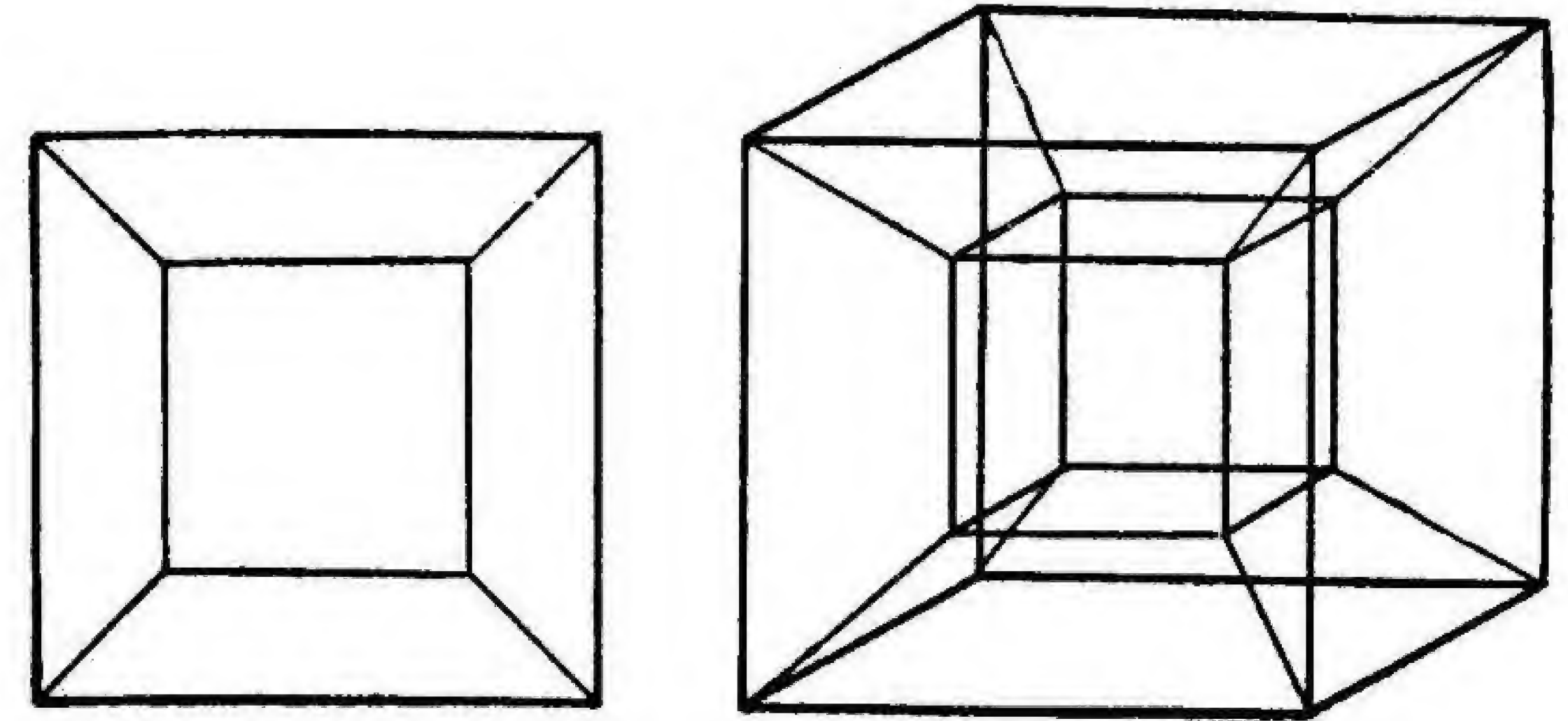


Fig. 31(a). El cubo y el tesseract.

el símil en cuatro dimensiones de un cubo de tres dimensiones, llamado *hipercubo* o *tesseract*. Nuestras dificultades para dibujar esta figura no están, en modo alguno, disminuidas por el hecho de que una figura de tres dimensiones puede dibujarse solamente *en perspectiva* sobre una superficie de dos dimensiones —como esta página—, mientras que el objeto de cuatro dimensiones, sobre una página de dos dimensiones, es sólo una perspectiva de una “perspectiva”.

Sin embargo, ya que  $a^2$  es igual al área de un cuadrado,  $a^3$  el volumen de un cubo, presentimos que  $a^4$  describe algo, cualquier cosa que sea. Sólo por analogía podemos razonar que ese “algo” es el *hipervolumen* (o contenido) de un hipercubo. Prosiguiendo nuestro razonamiento, deducimos que el hipercubo está limitado por 8 cubos, tiene 16 vértices, 24 caras y 32 aristas. Pero la representación de una imagen mental clara del hipercubo es otra historia.

Afortunadamente, sin tener que recurrir a diagramas deformados, podemos valernos de otros medios, usando objetos familiares para ayudar a nuestra débil imaginación a representarse una cuarta dimensión.



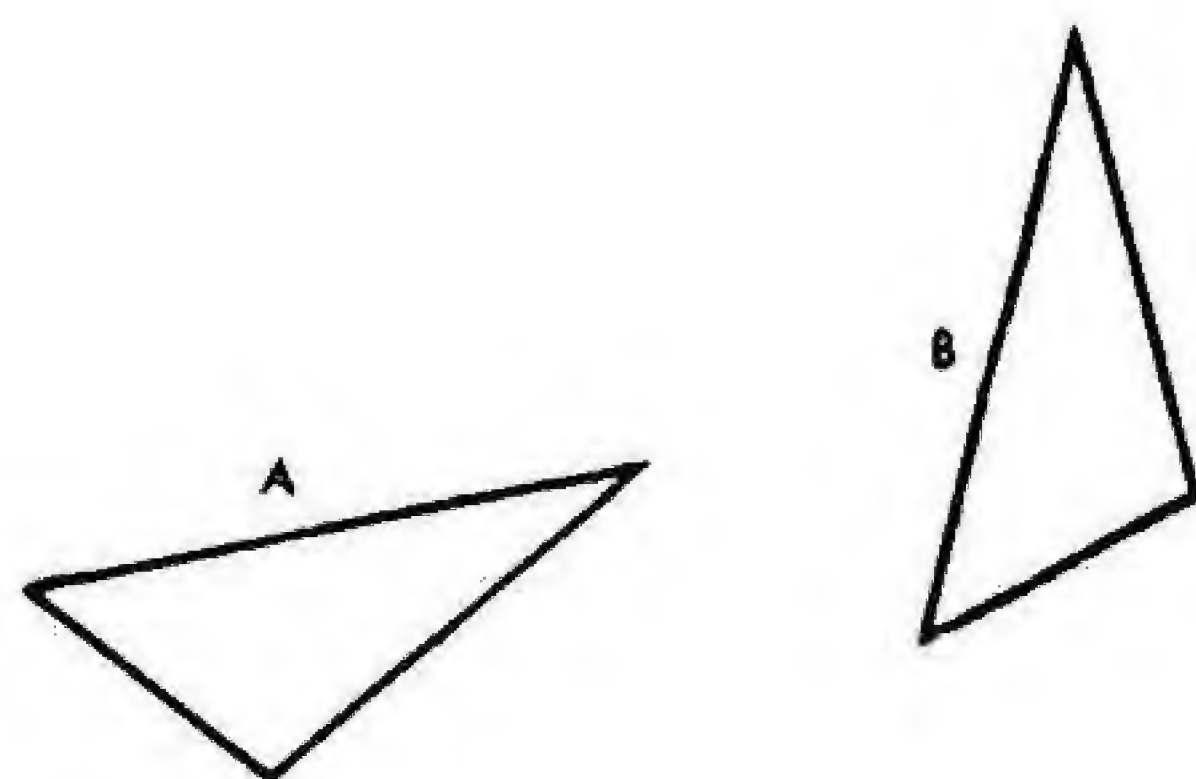


Fig. 32

Los dos triángulos A y B de la figura 32 son exactamente iguales.

Geométricamente, se dice que son congruentes\*, queriendo significar que con un movimiento adecuado puede superponerse perfectamente uno de ellos sobre el otro. Evidentemente, ese movimiento puede llevarse a cabo en un plano, es decir, en dos dimensiones, deslizando simplemente el triángulo A sobre el B\*\*. Pero, ¿qué ocurriría con los triángulos C y D de la figura 33?



Fig. 33

Uno de ellos es imagen reflejada del otro. Parecería que no hay razón alguna para que, haciendo deslizar o girar en el plano al triángulo C, no pueda éste superponerse a D. Y,

\* Para una definición exacta, véase el capítulo sobre paradojas.

\*\* En realidad, "deslizarse por encima de" sería imposible en un mundo de dos dimensiones.

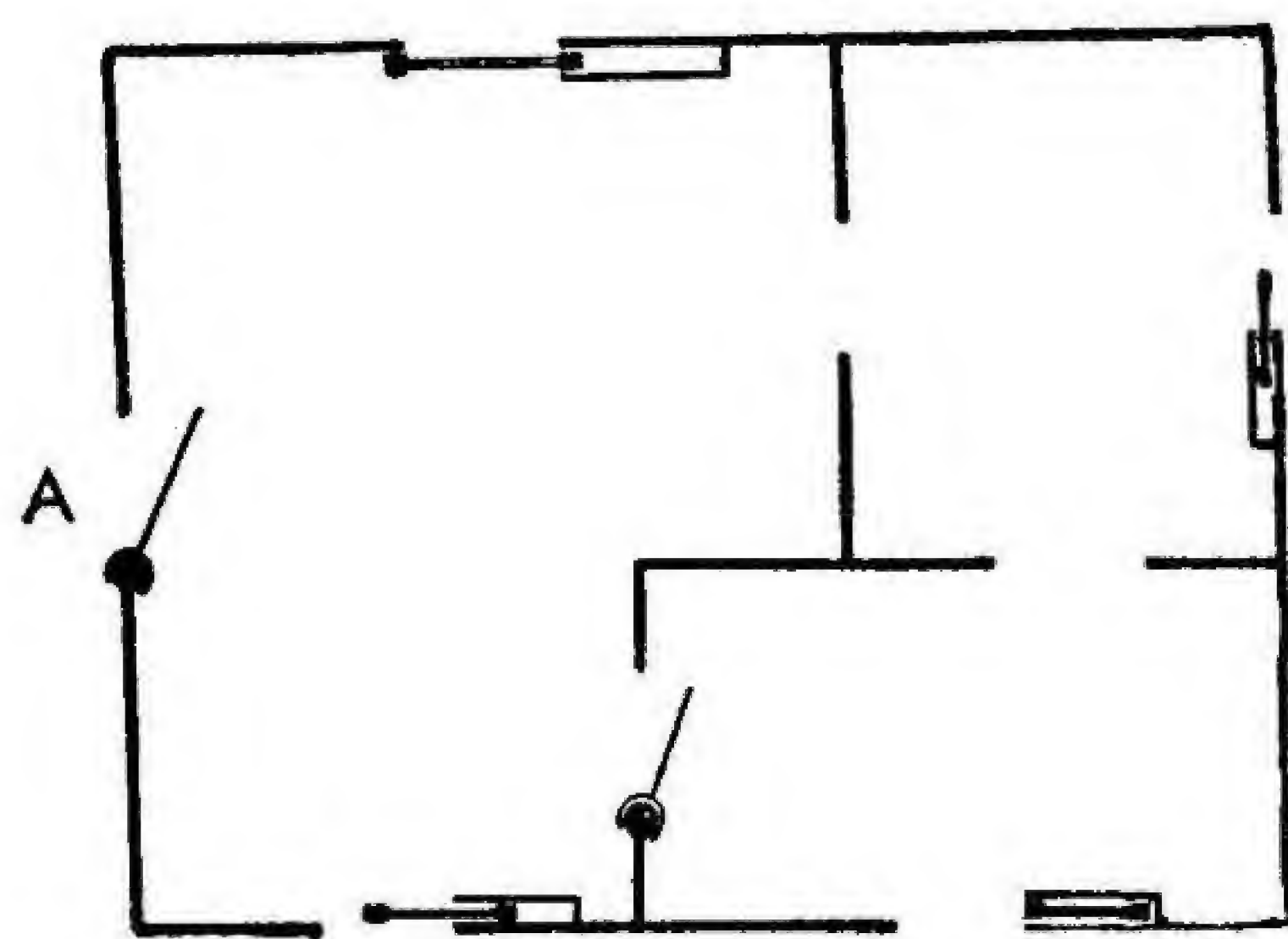
aunque resulte bastante extraño, esto no puede hacerse. C o D debe ser alzado del plano, de las dos dimensiones, llevado a un espacio de tres, para efectuar la superposición. Levante a C, volteeo, póngalo de nuevo en el plano y entonces podrá ser deslizado sobre D.

Luego, si para la solución de ciertos problemas en dos dimensiones es esencial una tercera dimensión, del mismo modo, una cuarta dimensión haría posible la solución de otros problemas insolubles en tres dimensiones. Por cierto que estamos en el reino de la fantasía y apenas necesitamos señalar que no existe una cuarta dimensión capaz de convertirnos a todos en Houdinis. Sin embargo, en estudios teóricos, es de señalada importancia una cuarta dimensión y forma parte de la trama y urdimbre de la física y matemáticas teóricas modernas. Los ejemplos elegidos de estos temas son muy difíciles y estarían fuera de lugar, pero algunos más simples, en dimensiones menores, pueden resultar entretenidos.

Si viviésemos en un mundo de dos dimensiones, como el descrito tan gráficamente por Abbott en su famosa novela *Flatland*\*, nuestra casa sería una figura plana, como la de la figura 34. Entrando por la puerta A estaríamos a salvo de nuestros amigos y enemigos una vez cerrada la puerta, aun cuando no hubiese techo sobre nuestra cabeza y las paredes y las ventanas fuesen simplemente líneas. Para pasar por encima de estas líneas habría que salir del plano y entrar en una tercera dimensión y, por supuesto que nadie en un mundo de dos dimensiones estaría, para hacerlo, en condiciones mejores que lo estamos nosotros para escapar del interior de una caja fuerte, bajo llave, y colocada en una cueva, valiéndose de una cuarta dimensión. Un gato de tres dimensiones podría espiar a un ratón bidimensional, pero éste jamás lo advertiría.

\* Que en este libro se tradujo como Planilandia. (N. del R.)



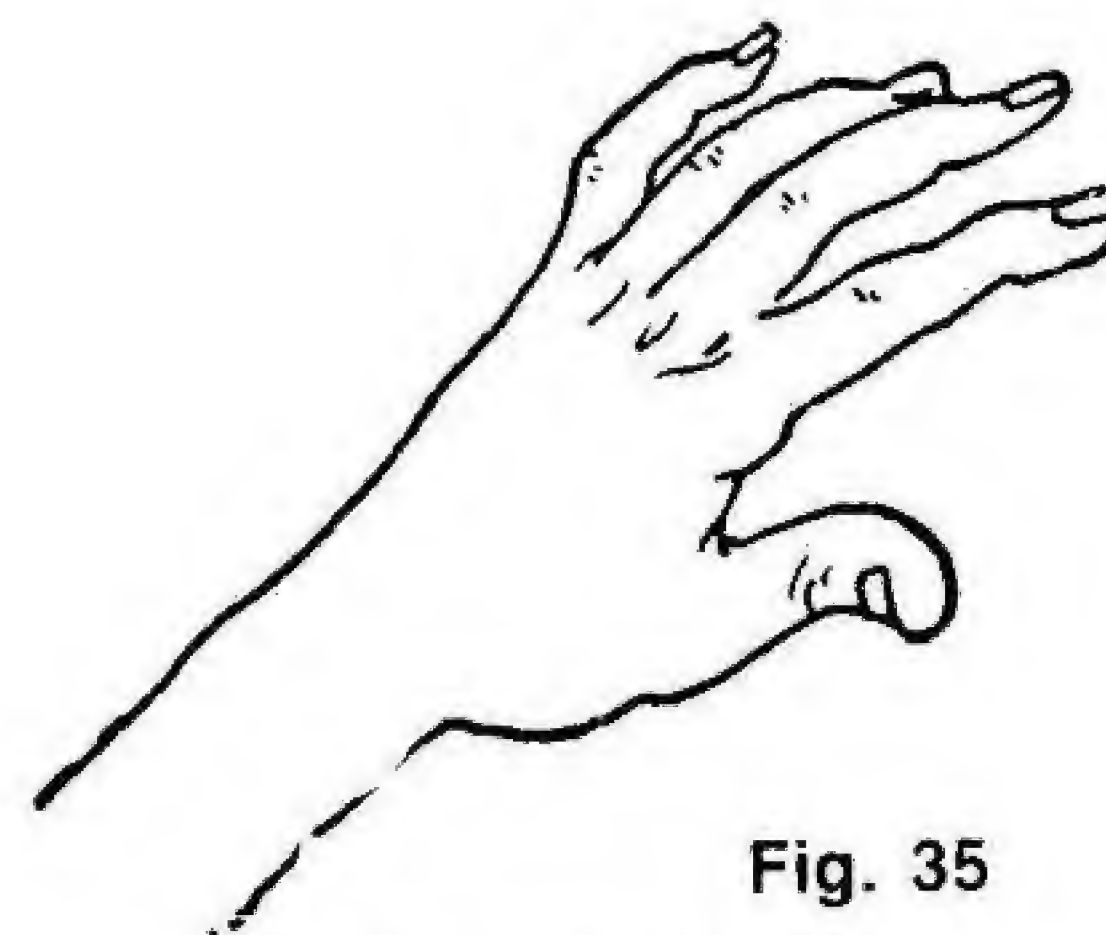


**Fig. 34.** Éste no es un plano, sino una casa real en Planilandia.

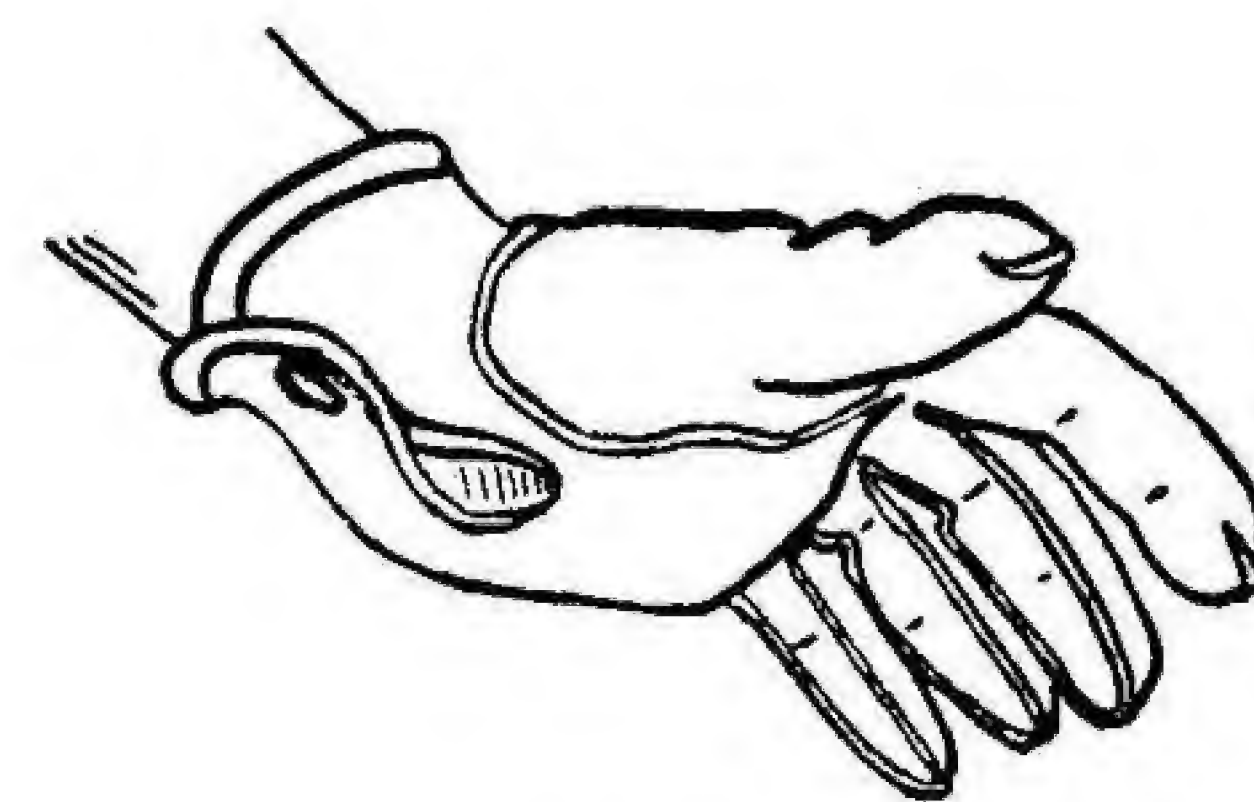
Cuando llega el invierno a Planilandia sus habitantes usan guantes.

Hasta ahora la ciencia moderna no ha podido solucionar el problema que se le plantea al hombre que se encuentra con dos guantes de la mano derecha, en lugar de uno de la derecha y otro de la izquierda. El mismo problema existiría en Planilandia. Pero allí, Gulliver, mirando a sus habitantes desde la altura de una tercera dimensión, vería al instante, así como en el caso de los dos triángulos de la figura 33, que todo lo que se necesita para convertir el guante derecho en uno izquierdo es *levantarlo y darle vuelta*. Por supuesto que nadie en Planilandia podría levantar un dedo para hacer eso mismo, puesto que ello implicaría una dimensión extra.

Así pues, si nosotros pudiésemos ser transportados a una cuarta dimensión, no habría fin a la cantidad de milagros que podríamos realizar, empezando con la rehabilitación de todos los guantes mal apareados. Alce el guante derecho del espacio de tres dimensiones, llévelo hasta la cuarta dimensión, déle vuelta, tráigalo nuevamente, y hélo convertido en

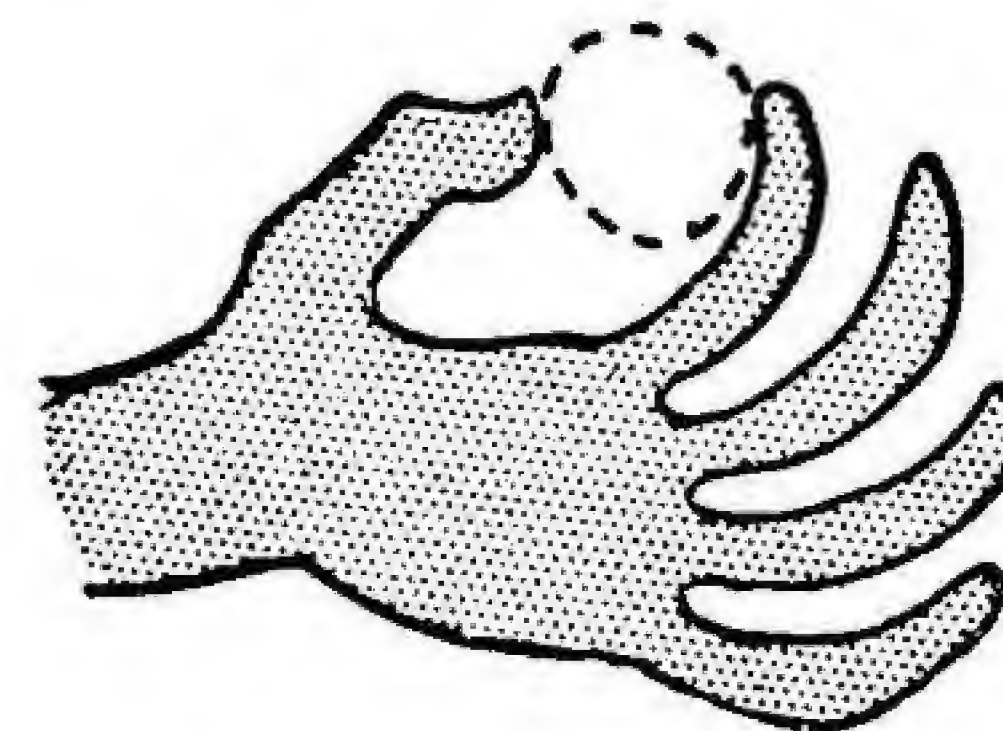


**Fig. 35**  
Las manos de tres  
dimensiones son así:

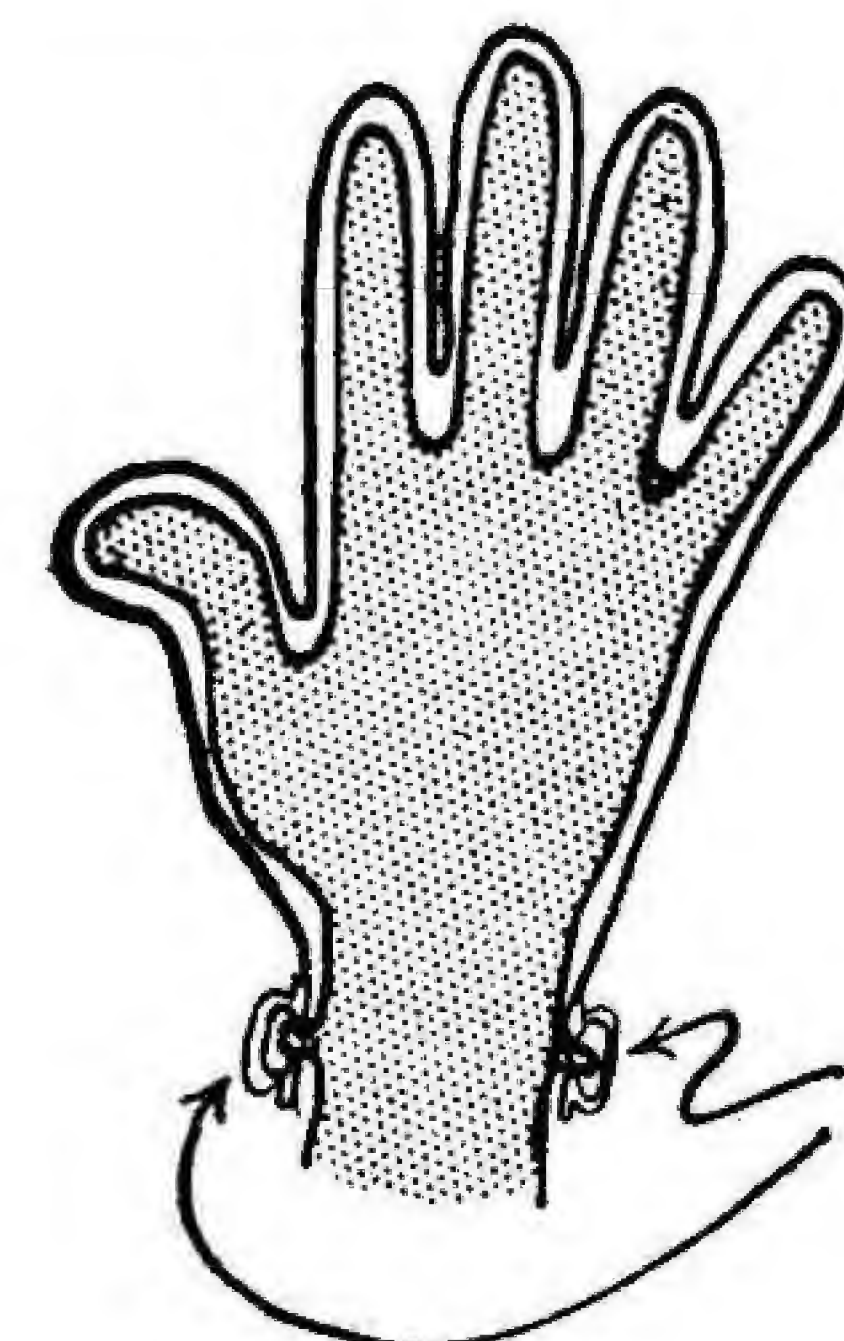


**Fig. 36**  
y los guantes así:

En Planolandia las manos tienen este aspecto:



**Fig. 37**



**Fig. 38**

un guante izquierdo. Ninguna celda podría encerrar al Gulliver de cuatro dimensiones, que sería de una amenaza mucho más seria que un hombre simplemente invisible. Gulliver podría tomar un nudo y desatarlo sin tocar los extremos y sin cortarlo, con sólo transportarlo a la cuarta dimensión y hacer deslizar la cuerda a través de la abertura adicional.



O bien, podría separar los dos eslabones de una cadena sin romperlos. Todo esto y mucho más le resultaría absurdamente sencillo, y contemplaría nuestra impotencia con la misma diversión y lástima con que nosotros miramos a los desdichados seres de Planilandia.

Nuestra novela debe terminar. Si la misma ha ayudado a algunos lectores a hacerles más real una cuarta dimensión y ha satisfecho un común anhelo antropomórfico, habrá cumplido su finalidad. En lo que a nosotros se refiere, confesamos que las fábulas jamás han aclarado los hechos.

Una idea asociada en sus orígenes con duendes y espíritus requiere, para ayudar a la ciencia, ser despojada, dentro de lo posible, de todo pensamiento confuso. Debe ser encarada clara y valientemente si se desea descubrir su verdadera esencia. En caso contrario, es aún más estúpido rechazarla y ridiculizarla que glorificarla y guardarla como reliquia. Ningún concepto salido de nuestras mentes o de nuestras plumas ha señalado un mayor avance de nuestro pensamiento, ninguna idea religiosa, filosófica o científica rompió más bruscamente con la tradición y los conocimientos comúnmente aceptados, que la idea de una cuarta dimensión.

Eddington lo ha expresado muy bien<sup>6</sup>:

Por muy satisfactoria que pueda ser la teoría de un mundo de cuatro dimensiones, es difícil no prestar atención a una voz que dentro de nosotros nos dice al oído: "En el fondo de tu mente, sabes que una cuarta dimensión es toda una insensatez." Me imagino que esa misma voz ha estado a menudo muy activa en la historia pasada de la física. ¡Qué disparate decir que esta mesa sólida sobre la cual estoy escribiendo es una colección de electrones que se mueven con prodigiosa velocidad en espacios vacíos, que, con relación a las dimensiones electrónicas son tan extensos como los espacios entre los planetas del Sistema Solar! ¡Qué desatino afirmar

que el tenue aire está tratando de aplastar mi cuerpo con una carga de 1 kilogramo por centímetro cuadrado! ¡Qué absurdo pretender que el grupo de estrellas que estoy viendo a través del telescopio, evidentemente allí *ahora*, es un reflejo de una época pasada de hace 50.000 años! No nos dejemos engañar por esta voz. Está desacreditada.

Hemos encontrado una huella extraña en las playas de lo desconocido. Hemos ideado teorías profundas, una después de otra, para explicar su origen. Al fin hemos logrado reconstruir al ser que dejó esa huella. Y, ¡he aquí! Es la nuestra.

Hemos subrayado el hecho de que la geometría pura está divorciada del espacio físico que percibimos a nuestro alrededor y ahora estamos en condiciones de atacar un concepto algo más difícil. No está de más, sin embargo, tratar de distinguir primero, en forma distinta a como lo hicimos antes, la diferencia entre el espacio tal como se le concibe ordinariamente y las variedades, que son los espacios de las matemáticas. Quizás esta distinción contribuirá a que nuestro nuevo concepto —las geometrías no euclidianas— parezca menos extraño.

Estamos muy acostumbrados a considerar al espacio como infinito, no en el sentido matemático técnico de los conjuntos infinitos, sino simplemente para significar que el espacio no tiene límites, que es sin fin. Por cierto que la experiencia cotidiana no nos enseña nada de eso. Los límites de un ciudadano particular, raramente llegan más allá de la extremidad de su brazo derecho. Las fronteras de una nación, como saben muy bien los contrabandistas de tabaco, no van más allá de la frontera de las doce millas.

La mayor parte de nuestras creencias acerca de la infinitud del espacio nos vienen de haberlas oído y, otra parte, de lo que pensamos que vemos. Así, por ejemplo, las estrellas parecen estar a millones de kilómetros, aunque en una no-



che oscura, una vela, a medio kilómetro de distancia, produciría la misma impresión. Además, si imaginamos que nuestro cuerpo se reduce hasta el tamaño de un átomo, entonces un guisante, a la distancia de dos o tres centímetros, nos parecería mucho más enorme y mucho más distante que el Sol.

La distinción entre el espacio del individuo y el "espacio público" pronto resulta evidente. Nuestro conocimiento personal del espacio no nos demuestra que sea infinito, homogéneo o isótropo. No sabemos que es infinito, porque nos arrastramos, saltamos o volamos sólo en reducidas regiones. No lo sabemos homogéneo porque un rascacielos, visto a distancia, parece mucho más pequeño que la punta de nuestra nariz y el peinado de la dama que está sentada delante de nosotros en el cine, nos impide ver la pantalla en su totalidad; y sabemos que no es isotrópico, es decir, que "no posee las mismas propiedades en todas direcciones"<sup>7</sup>, porque hay puntos ciegos en nuestra vista y nuestro sentido visual nunca es igualmente bueno en todas direcciones.

La noción de espacio físico o "público", que abstraemos de nuestra experiencia individual, tiene por objeto liberarnos de nuestras limitaciones personales. Decimos que el espacio físico es infinito, homogéneo, isótropo y euclidiano. Estas galanterías son fáciles de dedicar a una entidad ideal sobre la cual muy poco se sabe en realidad. Si preguntásemos al físico o al astrónomo: "¿Qué piensa usted acerca del espacio?" podría respondernos: "A fin de realizar medidas experimentales y describirlas con mayor comodidad, el físico opta por ciertos convenios con respecto a sus aparatos de medida y a las operaciones ejecutadas con los mismos. Se trata, hablando rigurosamente, de convenios relativos a objetos físicos y a operaciones físicas. Sin embargo, para fines prácticos, es conveniente atribuirles una generalidad que trasciende de cualquier conjunto concreto de objetos u operaciones. Entonces llegan a ser, como decimos, propiedades del espacio.

Esto es lo que significa espacio físico, que podemos definir, brevemente, como la construcción abstracta que posee aquellas propiedades de los cuerpos rígidos que son independientes de su contenido material. El espacio físico es aquel en que se basa la casi totalidad de la física y es, por supuesto, el espacio de las acciones cotidianas<sup>8</sup>."

Por otra parte, los espacios, o más generalmente las variedades que consideran los matemáticos, están construidas sin referencia alguna a las operaciones físicas tales como la medición. Poseen sólo aquellas propiedades expresadas en los postulados y axiomas de la geometría particular en cuestión, así como todas las otras propiedades que se deducen de los mismos.

Bien puede ser que los postulados sean sugeridos, en parte o en su totalidad, por el espacio físico de nuestra experiencia, pero debemos considerarlos como completamente desarrollados e independientes. Si los experimentos demostrasen que algunas, o todas nuestras ideas sobre el espacio físico son erróneas (como, en efecto, lo ha hecho la teoría de la relatividad), tendríamos que escribir de nuevo todos nuestros textos de física, pero no nuestras geometrías.

Pero esta aproximación al concepto del espacio, así como al concepto de geometría, es comparativamente reciente. No ha habido movimiento más arrollador en toda la historia de la ciencia, que el desarrollo de la geometría no euclidiana, un movimiento que estremeció hasta sus cimientos las creencias, proveniente de épocas remotas, de que Euclides había expresado verdades eternas. Capaz y exacta como instrumento de medida desde la época de los egipcios, intuitiva y plena de sentido común, santificada y apreciada como uno de los más ricos legados intelectuales de Grecia, la geometría de Euclides se irguió, durante más de veinte si-



glos, en solitaria, resplandeciente e intachable majestad. Estaba verdaderamente defendida por la divinidad y si Dios, como dijo Platón, alguna vez hizo geometría, con toda seguridad que consultó a Euclides las reglas. Los matemáticos que de vez en cuando tenían dudas, pronto expiaban su herejía con ofrendas votivas, bajo la forma de nuevas demostraciones que corroboraban a Euclides. Ni siquiera Gauss, el "Príncipe de los Matemáticos", se atrevió a exponer sus críticas por temor al vulgar denuesto de los "Beocios" \*.

¿De dónde vinieron las dudas? ¿De quién provino la inspiración de quienes se atrevieron a profanar el templo? ¿No eran acaso los postulados de Euclides evidentes en sí mismos y claros como la luz del día? ¿Y sus teoremas, no eran tan inexpugnables como  $2 + 2$  igual a 4? El centro de la siempre creciente tormenta que estalló, al fin, en el siglo XIX, fue su famoso quinto postulado sobre las líneas paralelas.

Este postulado puede enunciarse así: "Por cualquier punto del plano puede trazarse una, y sólo una, recta paralela a una recta dada."

Existe algún indicio para demostrar que el mismo Euclides no consideró a este postulado "tan evidente en sí mismo" como los demás<sup>9</sup>. Los filósofos y los matemáticos que intentaron reivindicarlo, pretendieron demostrar que se trataba en realidad de un *teorema* y, de este modo, que podía deducirse de sus premisas. Pero todas estas tentativas fracasaron por la sencilla razón de que Euclides, mucho más sabio que quienes lo sucedieron, había ya reconocido que el quinto postulado era simplemente una suposición y, por lo tanto, no podía demostrarse matemáticamente.

Más de dos mil años después de Euclides, un alemán, un ruso y un húngaro, vinieron a hacer añicos dos "hechos" in-

contestables. El primero, que el espacio obedecía a Euclides; el segundo, que Euclides obedecía al espacio. Gauss nos merece fe. No conociendo el alcance de sus investigaciones, en deferencia tanto a su grandeza como a su integridad, somos receptivos a su declaración de que había llegado, independientemente, a conclusiones semejantes a las del húngaro Bolyai, algunos años antes que el padre de Bolyai informara a Gauss acerca de la obra de su hijo.

Lobachevski, el ruso, y Bolyai, ambos en 1830, presentaron sus notables teorías al muy apático mundo científico de la época. Sostuvieron que no podía demostrarse el tan perturbador postulado y que tampoco podía deducirse de otros axiomas, porque sólo era un *postulado*. En su lugar, podía ser reemplazado por cualquier otra hipótesis sobre las paralelas y, como consecuencia de ello, surgiría una geometría diferente, tan compatible como "verdadera". Se conservarían todos los demás postulados de Euclides sólo que, en lugar del quinto, debía procederse a una sustitución: "A través de cualquier punto del plano, pueden trazarse *dos rectas* paralelas a una recta dada."

Del día a la noche las matemáticas se habían desprendido, pues, de las cadenas que las aprisionaban y había nacido una nueva línea de investigación teórica y práctica, ricamente fecunda.

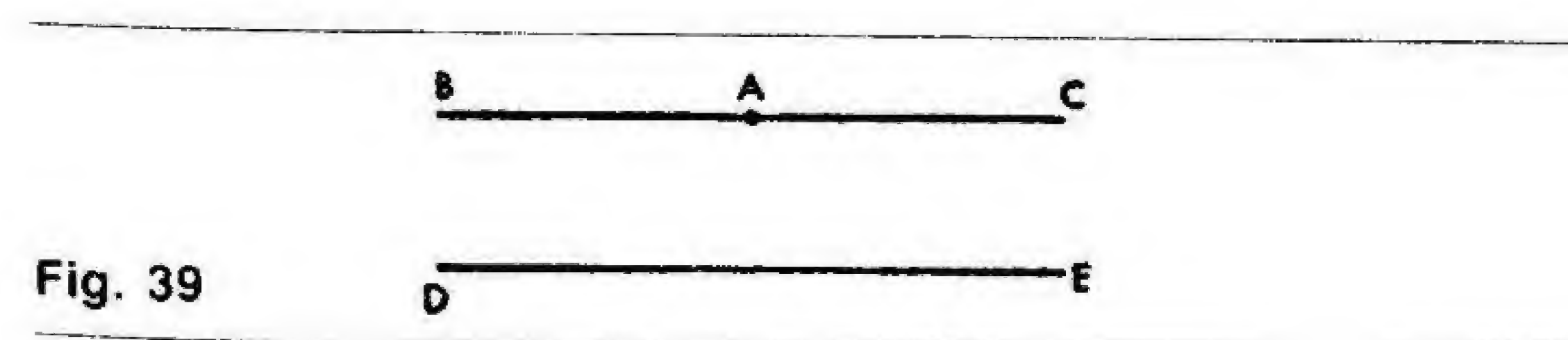


Fig. 39

En la figura 39 hay dos rectas paralelas: ¿Cómo es posible, podrá usted preguntar, que otra recta distinta de *BC* y sin embargo, paralela a *DE* pueda trazarse por *A*? La res-

\* Beocio. Perteneciente a una región de Grecia antigua y también significa: ignorante, tonto, estúpido, según el Diccionario de la R. A. Esp. (N. del R.)



puesta es que el lector está hablando del plano físico y de líneas trazadas con un lápiz. Está obsesionado por los fantasmas del sentido común, en lugar de razonar en términos de geometría pura. Usted puede ir más lejos y decir que en su sistema, en la geometría euclidiana, cualquier recta distinta de  $BC$  cortará a  $DE$  si se la prolonga lo suficiente. Nosotros le responderíamos que esa regla se aplica en su juego, pero no en el nuestro, la geometría de Lobachevski. Ninguno de nosotros, si somos matemáticos, está hablando del espacio físico, pero si así lo hiciésemos, habría más motivos para creer que somos nosotros, y no usted, quienes estamos diciendo la verdad.

Podemos presentar a la geometría de Lobachevski de la siguiente manera: En la figura 40 la recta  $AB$  es perpendicular a  $CD$ . Si la hacemos girar alrededor de  $A$ , en sentido levógiro, cortará a  $CD$  en varios puntos a la derecha de  $B$  hasta alcanzar una posición límite  $EF$ , en la cual será paralela a

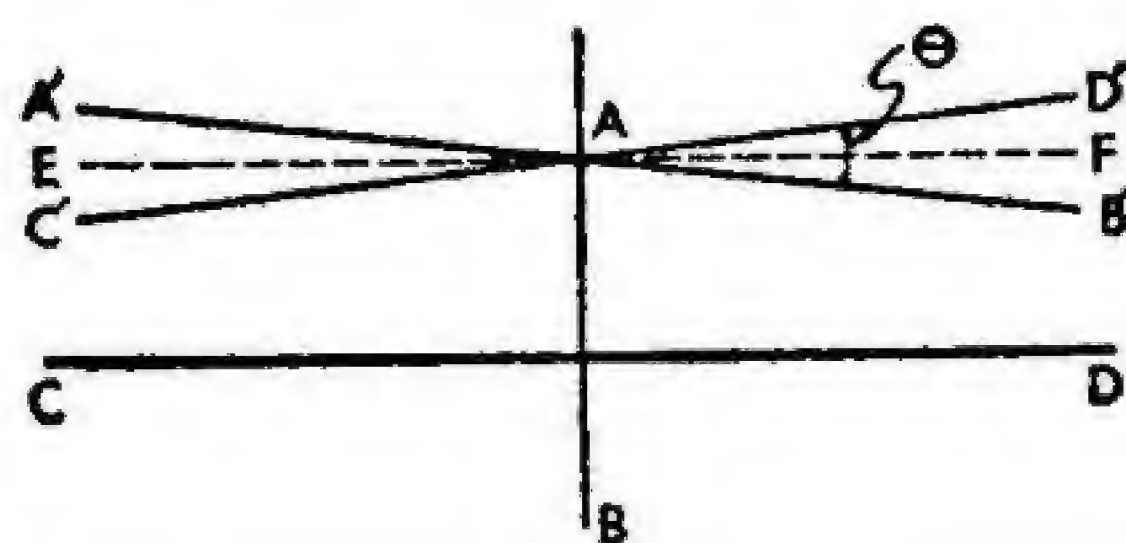


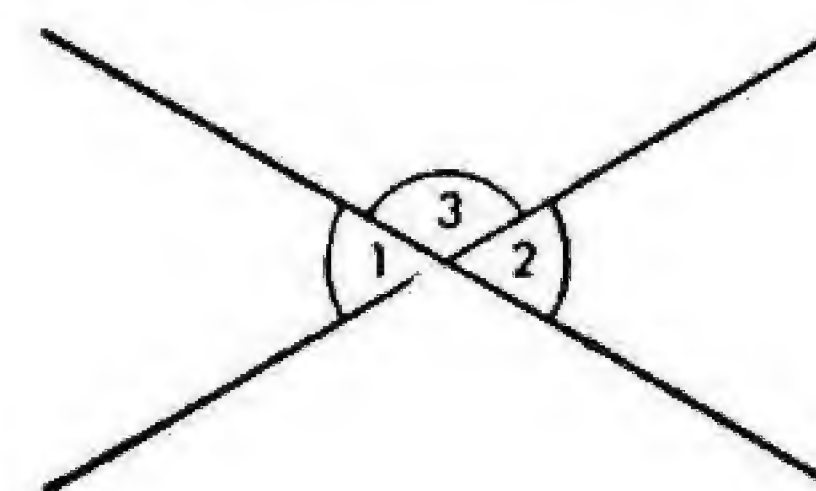
Fig. 40

$CD$ . Continuando la rotación, comenzará a cortar a  $CD$  a la izquierda de  $B$ . Euclides supuso que hay solamente una posición para la recta, a saber la  $EF$ , en la cual sería paralela a  $CD$ . Lobachevski supuso que había dos de dichas posiciones, representadas por  $A'B'$  y  $C'D'$  y además, que todas las rectas comprendidas dentro del ángulo, aun cuando no son paralelas a  $CD$ , jamás la encontrarán, por mucho que se prolonguen.

Ahora bien, esto es una suposición y no tiene sentido alegar, fundados en el diagrama, que es evidente que si  $A'B'$  o  $C'D'$  fuesen prolongadas lo suficiente entonces llegarían, finalmente, a cortar a  $CD$ . Si, como ha señalado el profesor Cohen, confiamos por entero en nuestra intuición del espacio, que es finito, habrá siempre un ángulo  $\theta$ , cada vez más pequeño a medida que nuestro espacio se extiende, pero que nunca desaparece, y ninguna de las rectas comprendidas dentro de  $\theta$  llegan a cortar a la recta dada<sup>10</sup>.

¿Qué le sucede a la geometría de Euclides cuando su postulado sobre las paralelas es reemplazado por el de Lobachevski? Muchos de sus teoremas importantes, los que en modo alguno dependen del quinto postulado, son válidos en ambas geometrías. Así por ejemplo:

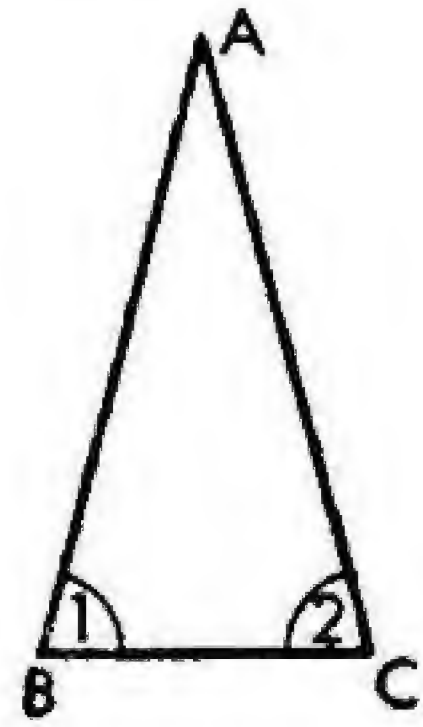
1. Si dos líneas rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales:


Fig. 41. Ángulo 1 = ángulo 2 (porque cada uno es igual a  $180^\circ$  menos el ángulo 3).

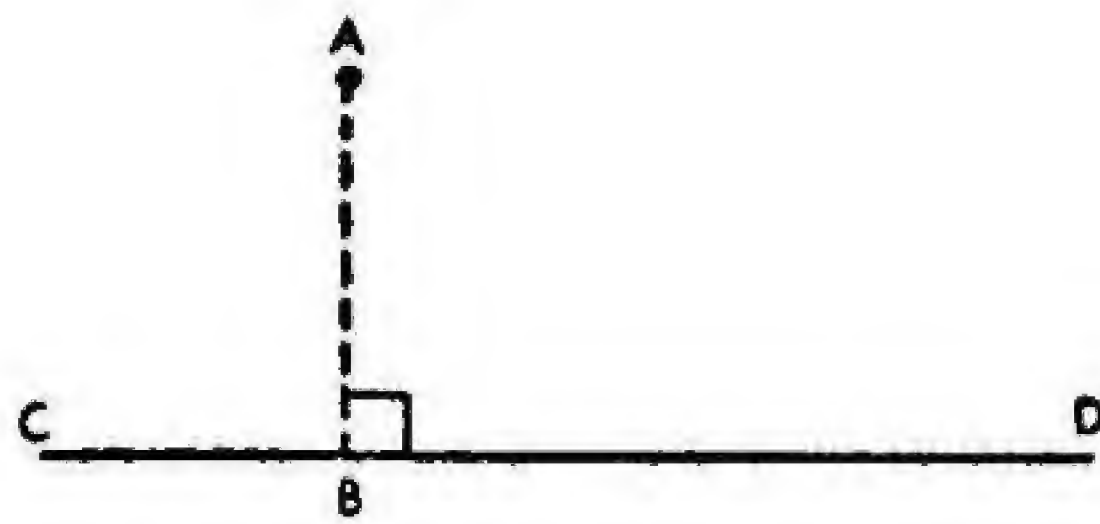
2. En un triángulo isósceles, los ángulos adyacentes a la base son iguales:
3. Desde un punto puede trazarse sólo una perpendicular a una recta dada:

Por otra parte, algunos teoremas muy importantes de la geometría euclidiana quedan alterados, con resultados sor-





**Fig. 42.** Si  $AB = AC$ , entonces el ángulo 1 = ángulo 2.



**Fig. 43.** Desde el punto A puede trazarse una y sólo una perpendicular a  $CD$ .

prendentes, cuando se sustituye al quinto postulado por otro. Así, en la geometría euclidiana, la suma de los ángulos de todo triángulo es *igual* a  $180^\circ$ ; mientras que en la geometría de Lobachevski, la suma de los ángulos de un triángulo es *menor* que  $180^\circ$ .

Las rectas paralelas en la geometría euclidiana nunca se cortan y quedan separadas a una distancia constante, por más que se prolonguen. Las rectas paralelas en la geometría de Lobachevski *nunca se encuentran; pero se aproximan una a otra asintóticamente*, es decir, la distancia entre ellas se hace cada vez menor a medida que se prolongan.

Citemos un teorema más interesante. En la geometría euclídea, dos triángulos pueden tener, respectivamente, ángulos iguales, pero áreas diferentes; uno puede ser, por así decirlo,

ampliación fotográfica del otro. En cambio, en la geometría de Lobachevski, *al aumentar el área del triángulo, la suma de sus ángulos disminuye*; así pues, sólo los triángulos de una misma área pueden tener ángulos iguales.

El talentoso Riemann, en su famosa tesis doctoral: *Sobre las hipótesis que son los fundamentos de la Geometría*, propuso aún otro sustituto para el quinto postulado de Euclides, distinto del de Lobachevski y Bolyai. Esta proposición sostiene que: "Desde un punto del plano no puede trazarse *ninguna* recta paralela a una recta dada." En otras palabras, cada par de rectas en el plano deben cortarse. Debe notarse que esto contradice la tácita suposición de Euclides de que una línea recta puede prolongarse indefinidamente. A propósito de esto, Riemann señaló la importante distinción entre infinito y no acotado: Así, el espacio puede ser finito aunque *no acotado*. Moviéndonos en una dirección dada, como las agujas de un reloj, podemos mantenemos por siempre en marcha volviendo eternamente sobre nuestros pasos. Como era dable esperar, la hipótesis de Riemann también afecta a aquellos teoremas de Euclides que dependen del quinto postulado. Tanto la geometría de Euclides como la de Lobachevski establecen que solamente puede trazarse una perpendicular a una recta, desde un punto dado. Pero en la geometría de Riemann puede trazarse cualquier número de perpendiculares, desde un punto cualquiera a una recta dada. Ahora, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que  $180^\circ$  en la geometría de Riemann, y los ángulos aumentan a medida que el triángulo se agranda (véase la fig. 47[a]).

Tenemos, pues, tres sistemas de postulados: el de Euclides, el de Lobachevski y el de Riemann. De los mismos se han desarrollado tres geometrías, la primera, euclidiana, las



otras dos, no euclidianas. Las geometrías no euclidianas deben mucho, por supuesto, a los postulados y métodos de Euclides. En lo que se refiere a los postulados, sólo difieren con respecto al postulado de las paralelas. Los teoremas en cambio, difieren en muchos aspectos.

Poco antes expusimos el criterio para todo sistema matemático: que sus postulados deben ser compatibles, es decir, no deben conducir a contradicciones. Pero, ¿cómo vamos a descubrir si las geometrías no euclidianas de Lobachevski y de Riemann son compatibles? Más aún, bien podría uno preguntarse, ¿cómo estamos ciertos de que los postulados de Euclides no dan lugar a contradicciones? Evidentemente, podemos acumular teorema tras teorema sin encontrar contradicción alguna, pero eso no constituye una prueba de que no pueda surgir ninguna en un tiempo futuro. ¿Acaso no estamos nosotros en mejores condiciones que si estuviésemos verificando una hipótesis de la física o de cualquier otra ciencia experimental?

Afortunadamente los matemáticos han ideado un recurso que satisface su conciencia sobre el particular. Consiste en demostrar, por ejemplo, en la geometría no euclidiana, que un conjunto de entidades que existen en la geometría euclidiana satisfacen los teoremas no euclidianos. Se supone que estas entidades, en sí mismas, están “libres de contradicciones y que, en efecto, incluyen, por completo, a los axiomas”<sup>11</sup> y se demuestra que estos últimos no implican incompatibilidades. Tomemos, separadamente, ejemplos de las geometrías de Lobachevski y de Riemann para aclarar el significado de todo esto.

La figura 44 representa la superficie engendrada por la revolución de una curva denominada *tractriz* alrededor de un eje horizontal.

La tractriz misma puede obtenerse de la siguiente manera: Sobre un par de ejes perpendiculares entre sí, como en

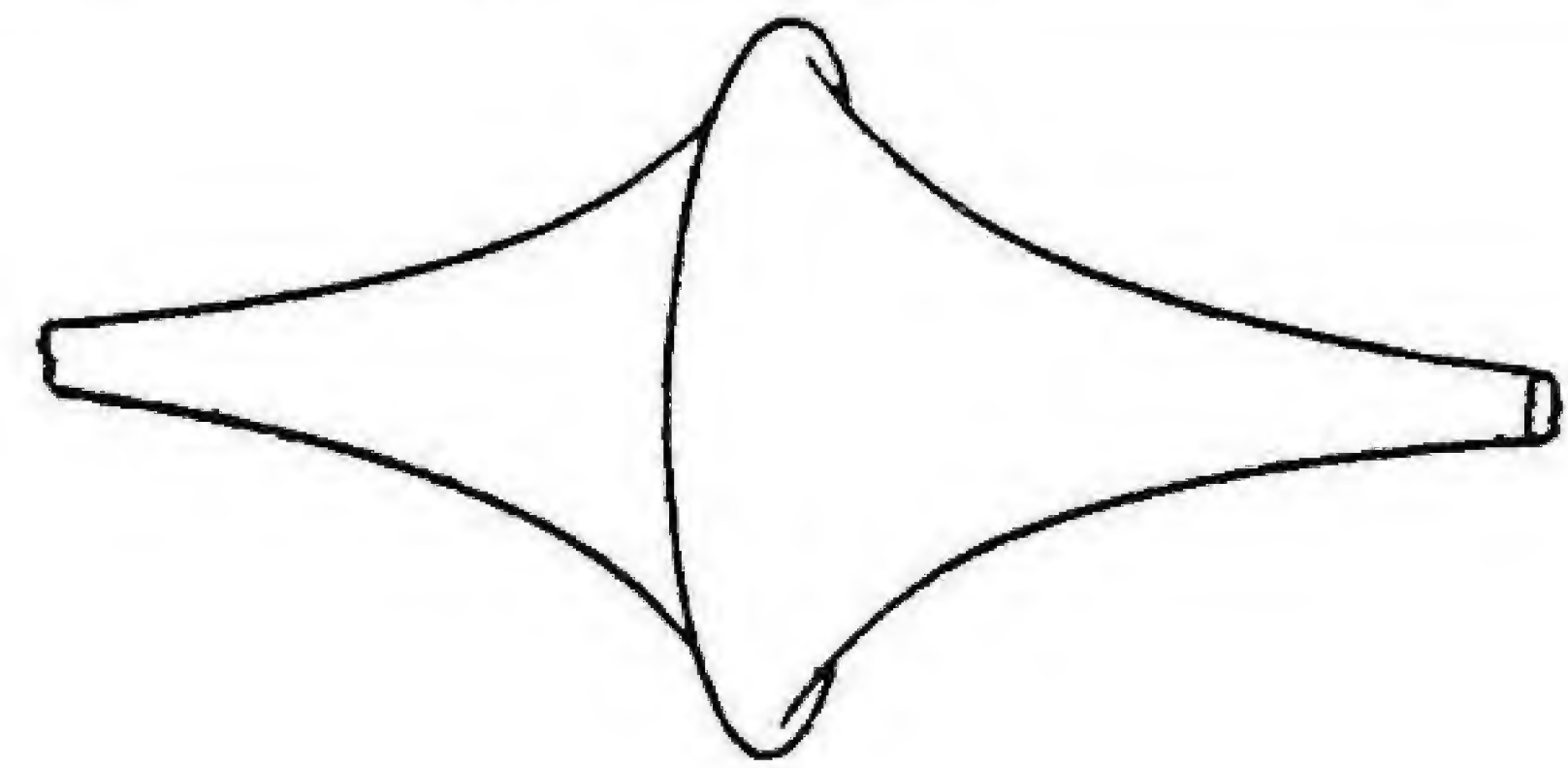


Fig. 44. La pseudoesfera.

la geometría cartesiana, imaginemos una cadena tendida a lo largo de  $YY'$ . A uno de los extremos de esta cadena está enganchado un reloj; el otro extremo coincide con el punto de origen  $O$ . Manténgase tensa la cadena y tírese lentamente del extremo libre, a lo largo del eje  $X$ , a la derecha de  $O$ . Repítase luego este movimiento hacia la izquierda. La trayectoria del reloj, en ambos casos, engendra la tractriz. Si ahora se hace girar esta curva alrededor de la línea  $XX'$  se forma una superficie que E. T. Bell denomina “superficie de doble trompeta”.

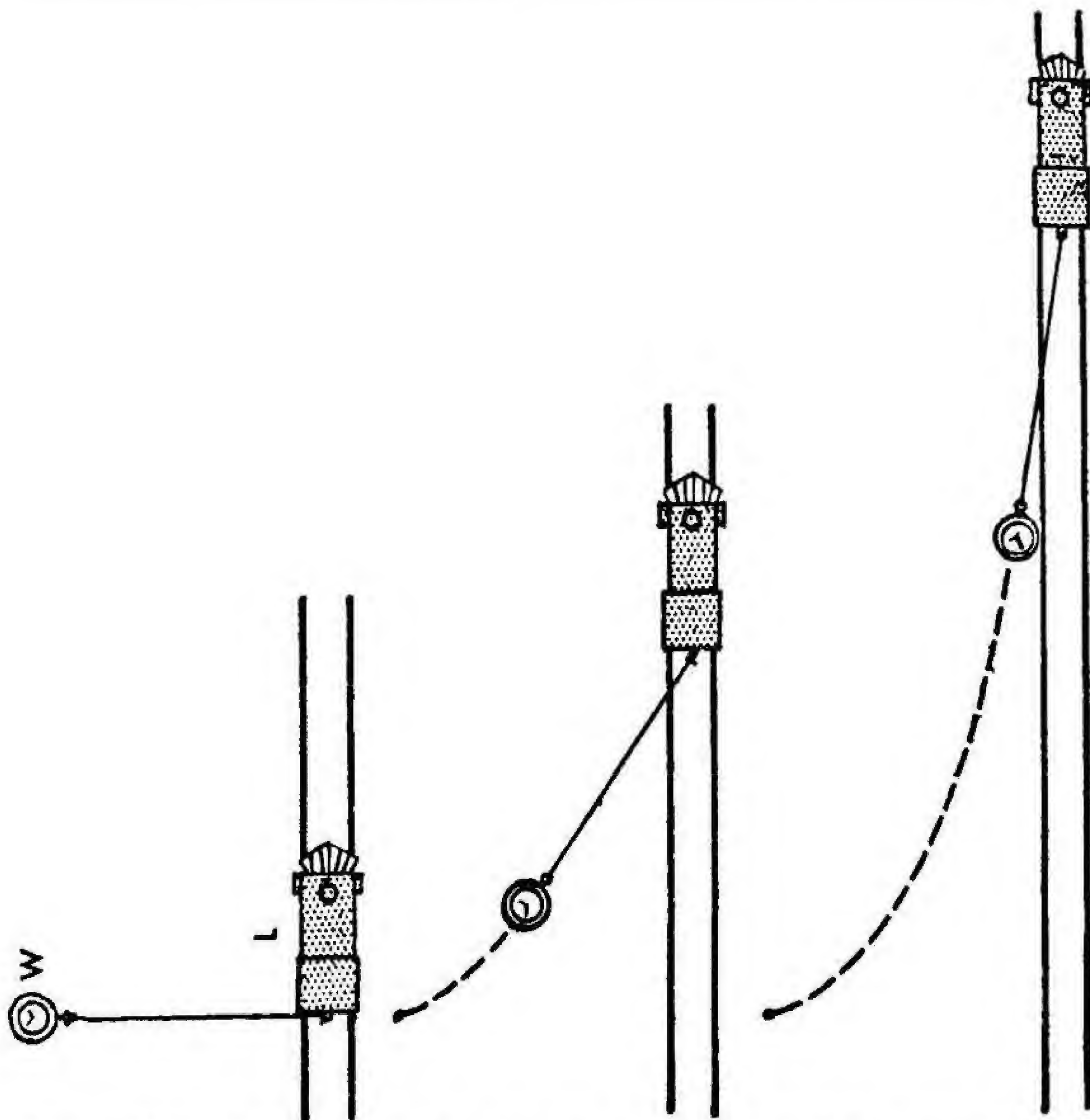
Beltrami llamó *pseudoesfera* a esta superficie. Encontramos que la geometría aplicable sobre una pseudoesfera es la de Lobachevski. Por ejemplo, sobre la pseudoesfera, desde un punto dado, pueden trazarse dos líneas paralelas a una tercera, que se aproximan asintóticamente a ella sin llegar a cortarla<sup>12</sup>. De este modo, la geometría de Lobachevski queda satisfecha por una entidad de la geometría de Euclides, cumpliendo, así, con el criterio de compatibilidad.

La geometría de Riemann es aplicable a un objeto muy familiar, la esfera. Puede verse en la figura 46 que un plano que pasa por el centro de una esfera corta su superficie según un *círculo máximo*.

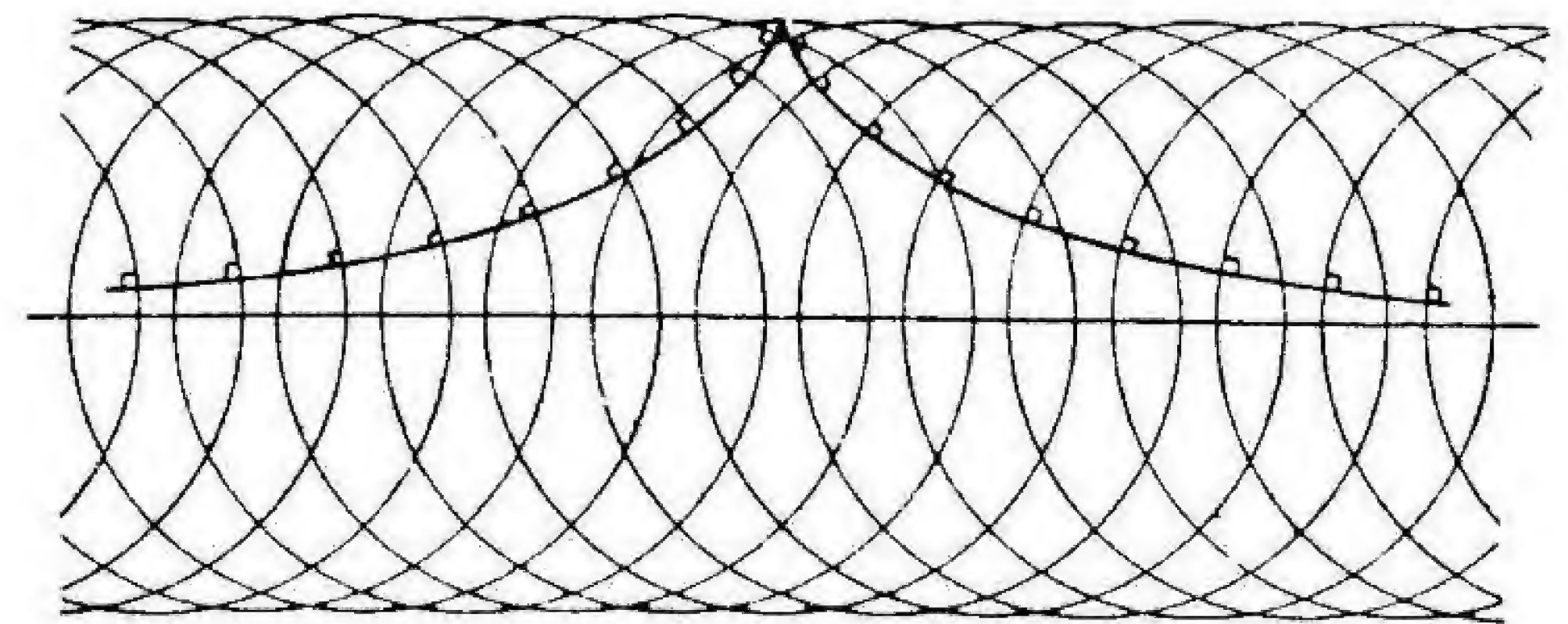
Aunque la Tierra es algo achatada por lo polos, podemos



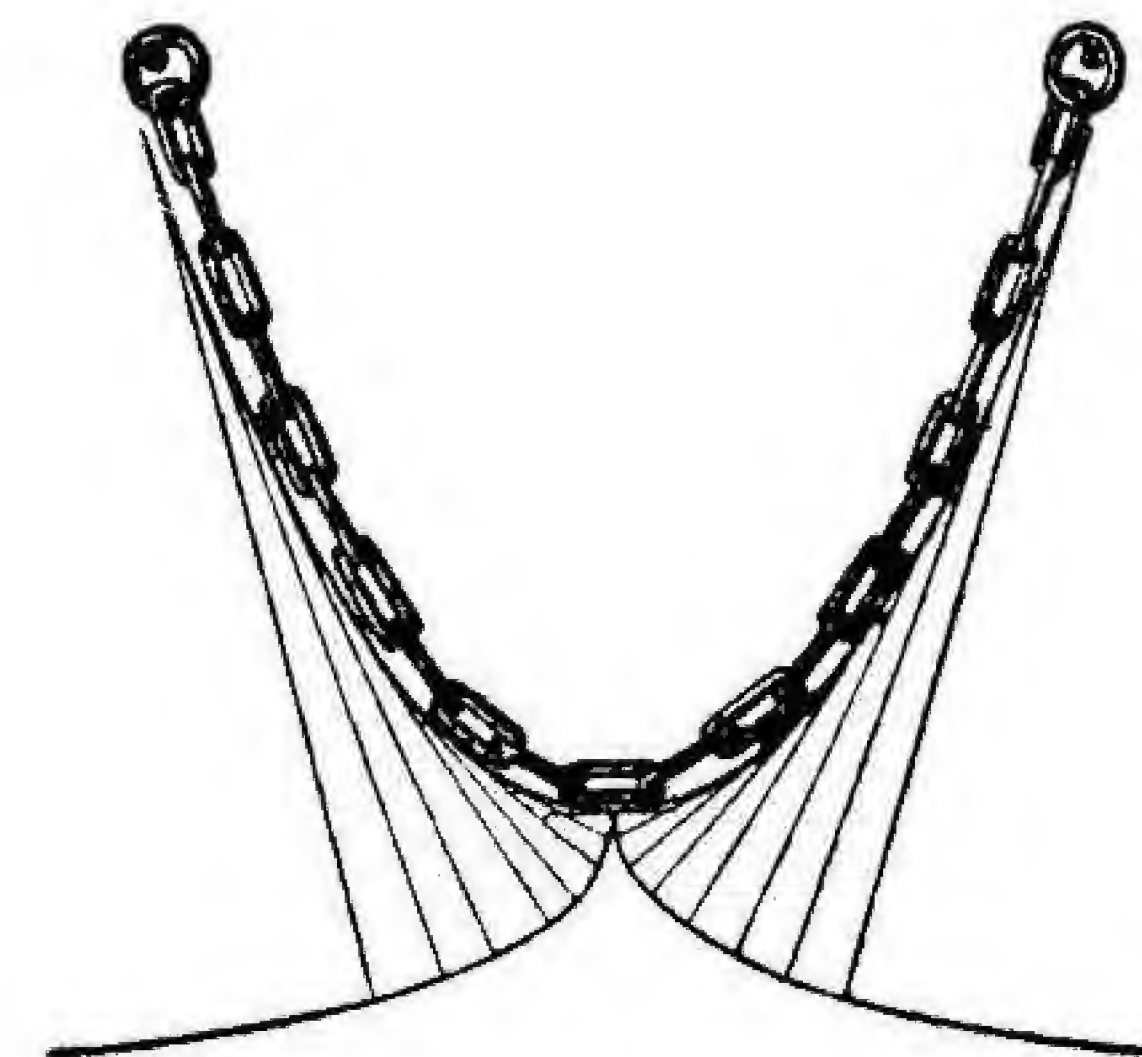
considerarla esférica, para los fines de esta discusión. Todo círculo que pase por los polos Norte y Sur, sobre la superficie de la Tierra, es un círculo máximo (meridiano), pero con la excepción del ecuador, los círculos de latitud o paralelos, no lo son. Las líneas rectas trazadas sobre la superficie de la



**Fig. 45(a).** Una forma de engendrar la tractriz. La locomotora de juguete está atada al reloj *W*, quedando la cuerda perpendicular a la vía. Cuando la locomotora se pone en marcha, la trayectoria del reloj es una tractriz.



**Fig. 45(b).** La tractriz también es la curva que es perpendicular a una familia de círculos de igual radio cuyos centros pertenecen a una misma línea recta.



**Fig. 45(c).** La curva formada por una cadena que cuelga libremente se denomina catenaria. Si se trazan las tangentes a una catenaria, la curva normal a ellas y que encuentra a la catenaria en su punto más bajo es, de nuevo, la tractriz.



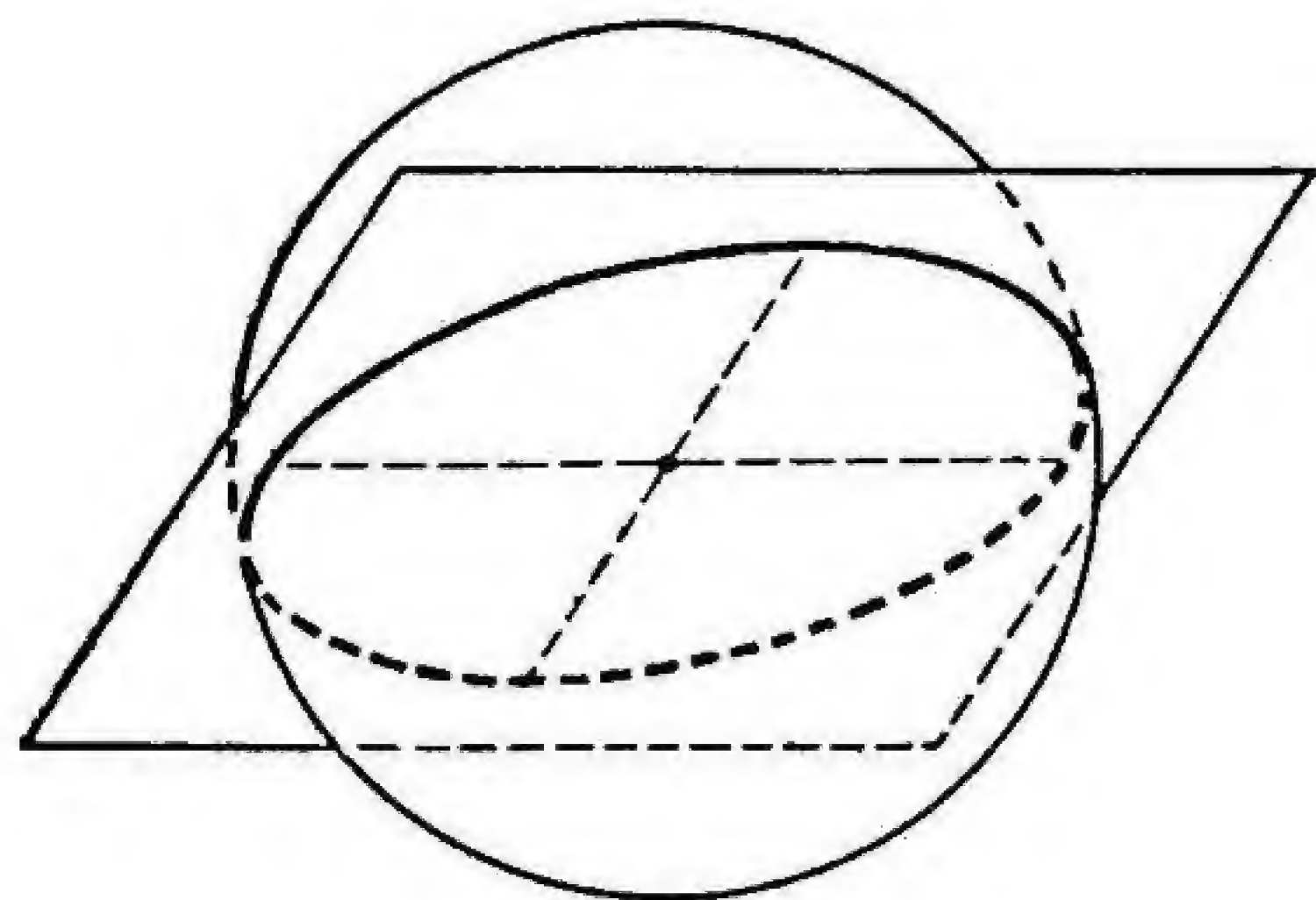
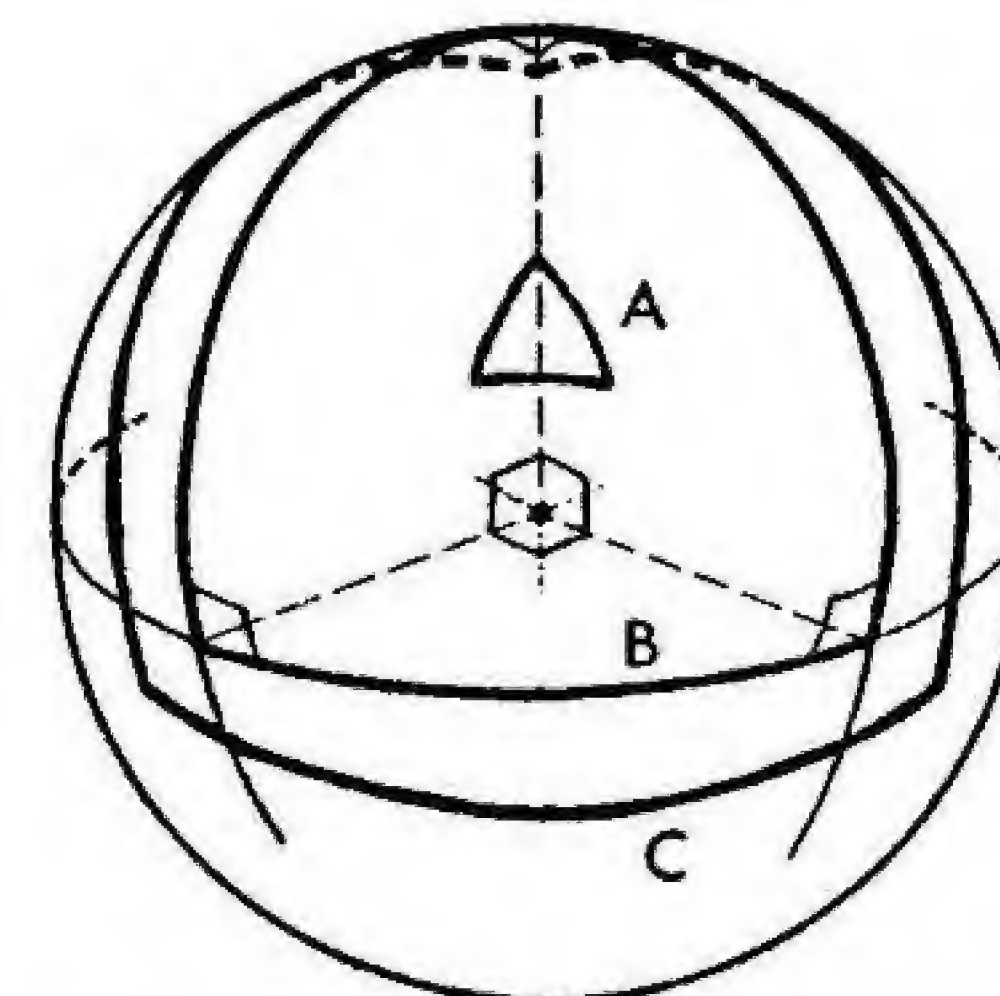


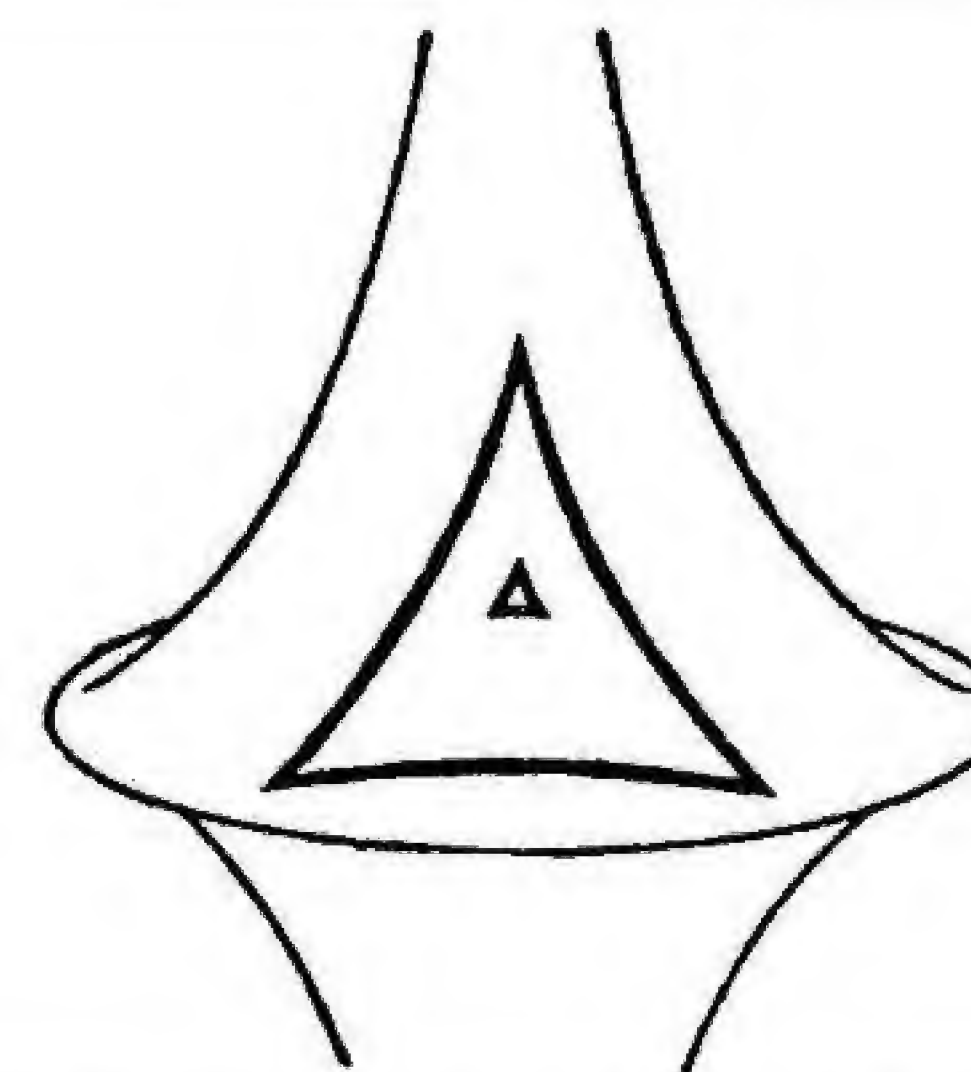
Fig. 46

Tierra son siempre parte de círculo máximo y aun cuando dos de dichas líneas sean perpendiculares a una tercera (lo cual en la geometría euclidiana significaría que son paralelas), siempre se cortarán en un par de polos. De este modo, los elementos para una geometría que satisfaga la superficie de la Tierra, son idénticos a los de la geometría riemanniana. Por ejemplo, un triángulo trazado sobre la superficie de la Tierra tendrá ángulos cuya suma será mayor de  $180^\circ$  y, cuanto mayor sea el triángulo, mayor será la suma de sus ángulos.

Además, dos líneas rectas trazadas sobre la superficie de la Tierra, si se las prolonga suficientemente, encerrarán siempre una superficie. Es conveniente recordar, a esta altura del texto, la importante distinción notada por Riemann de que una superficie puede ser finita pero no acotada, de manera que las líneas rectas trazadas sobre la superficie de la Tierra pueden extenderse en forma indefinida aunque es evidente que la superficie no es infinita, sino simplemente no acotada. Las propiedades riemannianas de la esfera han sido expuestas en forma divertida en el siguiente acertijo: Un grupo de deportistas, una vez armadas sus tiendas de campaña, se pu-



**Fig. 47(a).** El triángulo A es pequeño comparado con la esfera; por lo tanto, casi es un triángulo plano y la suma de sus ángulos se aproxima a  $180^\circ$ . Pero a medida que crece y llega a convertirse en el triángulo B, cuyos lados pertenecen a tres círculos máximos perpendiculares entre sí, vemos que la suma de sus ángulos llega a ser:  $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$ . En el triángulo C, mayor aún que el anterior, los ángulos, que son todos obtusos, dan una suma mayor que  $270^\circ$ .



**Fig. 47(b).** Esto es lo contrario de lo que ocurre en una esfera, fig. 47(a). En una seudoesfera, a medida que el triángulo crece, resulta menor la suma de sus ángulos.



sieron en marcha para cazar osos. Caminaron 15 kilómetros hacia el Sur y luego 15 kilómetros hacia el Este, divisando un oso. Lo cazaron y volvieron al campamento, descubriendo que, en conjunto, habían recorrido 45 kilómetros. ¿De qué color era el oso?

Nuestra breve exposición sobre la geometría no euclidiana despertará en la mente del lector muchas preguntas que no son de nuestra incumbencia, pero la literatura al respecto, aun la literatura popular, es tan extensa, que nadie suficientemente interesado necesita andar mendigando respuestas.

Sin embargo, tal vez sea conveniente considerar una pregunta muy natural que podría asumir la siguiente forma: "Sobre una esfera, dos líneas rectas, aunque paralelas en un lugar, indudablemente se cortan (si se las prolonga suficientemente) y pueden encerrar una superficie. ¿Por qué, entonces, llamar 'rectas' a dichas líneas? ¿No son acaso realmente curvas?"

En principio, es evidente que depende de la definición de "recta" afirmar que una línea lo sea o no. Se ha encontrado conveniente, en las matemáticas, formular dicha definición sólo con referencia a la superficie particular que se considera. Una manera de definir una línea recta consiste en decir que es la distancia más corta entre dos puntos. Por otra parte, todo el mundo sabe, por lo mucho que se ha hablado en tiempos recientes de las proezas aeronáuticas, que la ruta más corta entre dos puntos de la superficie terrestre puede cubrirse siguiendo el arco del círculo máximo que pasa por ellos. Felizmente, a través de cada dos puntos de la superficie de una esfera, pasa, en efecto, un círculo máximo.

Luego, el círculo máximo sobre la esfera, corresponde a la línea recta en el plano —es la distancia más corta entre dos puntos de él. Pueden encontrarse curvas adaptables a

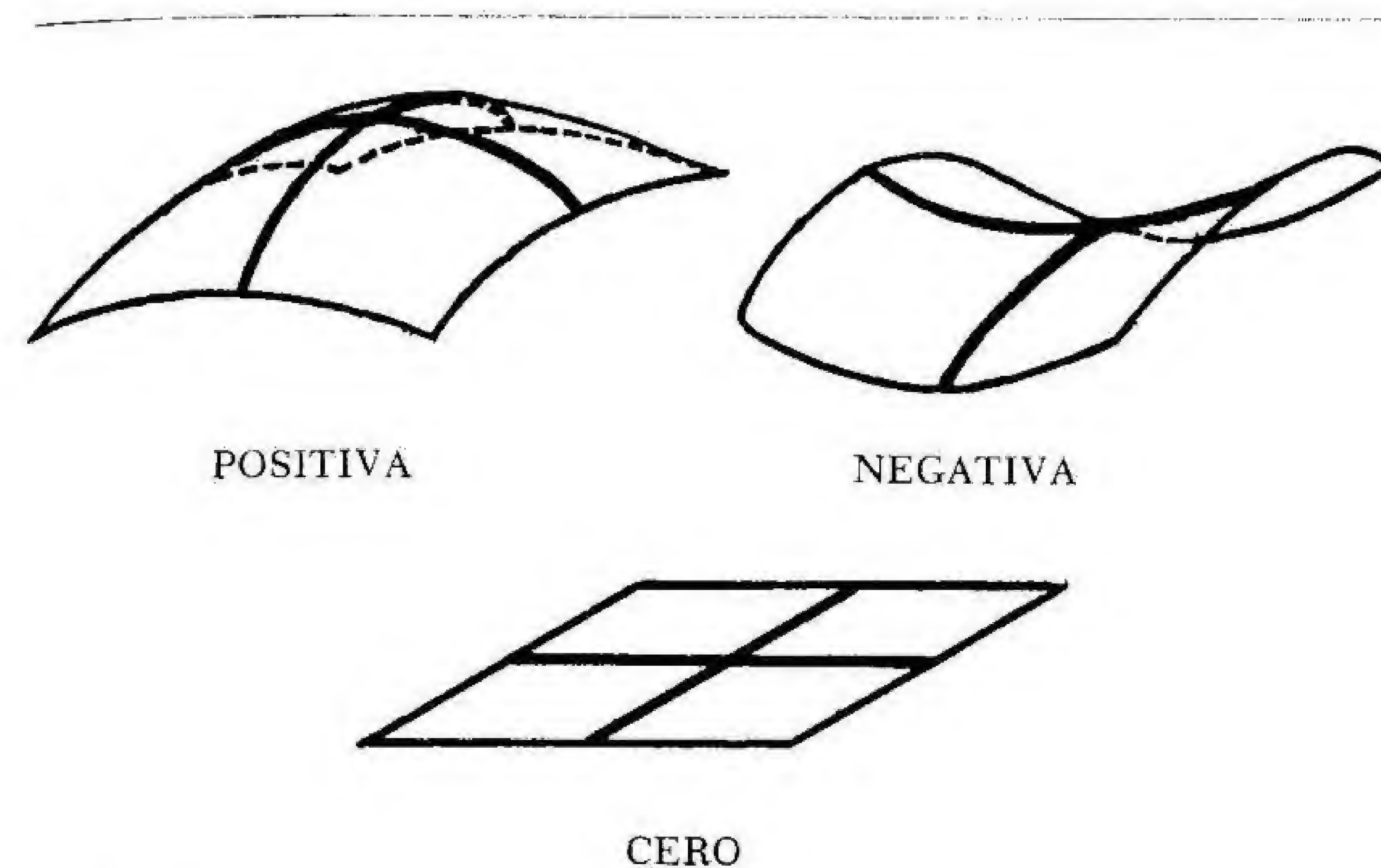


Fig. 48. Curvatura.

otros tipos de superficies, por ejemplo, la seudoesfera o una superficie en forma de silla de montar, o galápago, que desempeñan el mismo papel. Generalizando esta noción puede afirmarse que una curva que sea la distancia más corta entre dos puntos (análoga a la línea recta en el plano) sobre cualquier clase de superficie, se denomina *geodésica* de esa superficie. Cuando buscábamos entidades que satisficieran la geometría de Lobachevski y la de Riemann, buscábamos en realidad superficies cuyas geodésicas obedecieran los postulados de las paralelas de estas geometrías.

En el plano, si adoptamos la hipótesis de Euclides, un par de geodésicas distintas se encuentran en un punto, a menos que sean paralelas, en cuyo caso no se cortan. Sobre una esfera, un par de geodésicas (arcos de círculos máximos), aun siendo paralelas, siempre se cortan en dos puntos y, por lo tanto, la esfera obedece a la geometría de Riemann. Sobre una seudoesfera, que obedece a la geometría de Lobachevski,



ki, las geodésicas paralelas pueden aproximarse una a otra *asintóticamente*, pero nunca se cortan.

Las geodésicas de una superficie quedan determinadas por su *curvatura*. La curvatura no es fácil de explicar aunque todos nosotros tenemos una noción intuitiva de su significado. Un plano tiene curvatura nula. Una superficie como la de una esfera o un elipsoide es de curvatura positiva, mientras que de una superficie en forma de silla de montar o de la seudoesfera se dice que son de curvatura negativa. Podemos imaginar superficies más complicadas, parte de las cuales pueden tener curvatura positiva, otras partes, negativa y finalmente, algunas otras partes de curvatura nula. Las geodésicas de una superficie, así como su geometría más adecuada, dependen de dicha curvatura, positiva, negativa o nula. De ahí que la geometría de una superficie de curvatura negativa constante es lobachevskiana, la de una superficie de curvatura positiva constante, es riemanniana y la de una superficie de curvatura nula, es euclidiana.

Todo cuanto se ha dicho acerca de la geometría no euclidiana si bien es bastante evidente cuando hablamos de *geometría*, tiende a tomarse confuso al querer aplicarlo a nuestra experiencia cotidiana. Estamos inclinados a compadecer a los habitantes de un mundo de dos dimensiones, tanto por su ignorancia como por sus limitaciones físicas. Ellos no pueden ni siquiera soñar en hacer cosas que para nosotros son perfectamente vulgares. Sin embargo, tendemos a mostrar las mismas limitaciones intelectuales para representarnos el mundo a nosotros mismos. En realidad, vamos más lejos porque deliberadamente rechazamos nuestra propia experiencia. Nuestra experiencia nos dice que el espacio es finito pero no acotado y que las líneas rectas que podemos trazar en la superficie sobre la cual vivimos nunca pueden ser

realmente rectas, sino que deben ser curvas. (Por supuesto, ya que la curvatura de la Tierra es distinta de cero.) Pero continuamos confundiendo infinito y no acotado, descartando este último que constituye nuestro verdadero conocimiento del espacio y admitiendo el primero por razones religiosas y estéticas. Y, aunque toda persona inteligente sabe que la superficie de la Tierra es curva y todo marino conoce la navegación sobre círculos máximos, la mayoría de nosotros se comporta como los Adventistas del Séptimo Día al razonar que nuestras líneas rectas están trazadas en un plano de curvatura nula —o, lo que es lo mismo, en un mundo plano. De aquí hay sólo un paso para creer que el quinto postulado de Euclides es sagrado y cualquier sustituto al mismo está “contra la naturaleza”. Una pequeña curvatura, más aún que una instrucción reducida, tiene sus desventajas.

Aunque sabemos muchísimo más de la superficie que habitamos que acerca del espacio físico en que vivimos, resulta difícil elegir entre los absurdos de nuestras creencias acerca de una y otro. La geometría de Euclides, que considera superficies de curvatura nula, en el sentido más riguroso (haciendo caso omiso de la conveniencia en el cálculo) no se adapta a la superficie sobre la cual vivimos tan bien como la de Riemann. Evidentemente, nuestras geometrías, aunque sugeridas por nuestras percepciones sensoriales, no dependen de ellas.

Las geometrías que hemos tratado son sólo tres entre un infinito número de posibles. Cualquier geometría, sean cuales fueren sus postulados (siempre que no conduzcan a contradicciones), será tan “verdadera” como la geometría de Euclides. Para cada superficie, por compleja que sea su curvatura, hay siempre una geometría que la satisface particularmente. Es exacto que comenzamos nuestras geometrías como estructuras puramente lógicas, pero, así como en otras ramas de las matemáticas, descubrimos que la naturaleza se nos ha antici-



pado y que una superficie sirve, a menudo, a nuestra inventiva. Por esa razón, las matemáticas no euclidianas han encontrado campos de aplicación enormemente importantes en la intrincada física moderna.

Mientras que nosotros hemos considerado las aplicaciones de las geometrías no euclidianas de dos dimensiones a las superficies usuales, los fisicomatemáticos estudian la aplicación de geometrías no euclidianas de más dimensiones a las variedades del espacio pluridimensionales. Al tratar de descubrir en qué clase de espacio vivimos realmente, los hombres de ciencia han obtenido resultados que los inducen a creer que el espacio es más bien curvado que recto. Habiéndonos liberado de la idea primitiva de que vivimos en una superficie *plana*, no sería tan difícil aceptar que el espacio es curvo.

Hay todavía un punto final: Si consideramos a las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann como matemáticas aplicadas y no como puras y si preguntamos cuál de ellas es más apropiada para el espacio que nos rodea y para la superficie sobre la cual vivimos, ¿cuál deberá ser nuestra respuesta? Solamente el experimento y la medición pueden responder a esa pregunta. Se desprende que la geometría de Euclides es la más *conveniente* y la única, en consecuencia, que seguiremos usando para construir nuestros puentes, túneles, rascacielos y carreteras. Las geometrías de Lobachevski y de Riemann, tratadas adecuadamente, también servirían<sup>13</sup>. Nuestros rascacielos las admitirían (y otro tanto pasaría con nuestros puentes, túneles y carreteras), nuestros ingenieros quizá no. La geometría de Euclides es más fácil de enseñar, se ajusta más fácilmente con el extraviado sentido común, pero, por sobre todas las cosas, es más fácil de usar. Y, en esas cosas, después de todo, nos interesan más nuestras necesidades que la lógica.

Sin embargo, nuestros puntos de vista se han ampliado y

nuestra visión es más clara. Las matemáticas nos han ayudado a superar aquellas impresiones sensoriales de las que ahora podemos decir: "nunca nos engañan, aunque mienten siempre".

## NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1. San Agustín, *Confesiones*. Página 118.
2. Un ejemplo de matemáticas puras tomado de Morris Raphael Cohen y Ernest Nagel, *An Introduction to Logic and Scientific Method* (New York, Harcourt Brace, 1936). Páginas 119-126.

Consideremos las siguientes proposiciones que son los axiomas para una clase especial de geometría:

- Axioma 1.* Si  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos entre sí, en un plano hay, entonces, por lo menos, una recta que contiene a  $A$  y a  $B$ .
- Axioma 2.* Si  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos entre sí, en un plano entonces no hay más que una recta que contiene a  $A$  y  $B$ .
- Axioma 3.* Dos rectas cualesquiera del plano tienen por lo menos, en común, un punto de éste.
- Axioma 4.* Hay por lo menos una recta en el plano.
- Axioma 5.* Toda recta contiene, por lo menos, tres puntos del plano.
- Axioma 6.* No todos los puntos de un plano pertenecen a la misma recta.
- Axioma 7.* Ninguna recta contiene más de tres puntos del plano.

Estos axiomas parecen referirse evidentemente a puntos y rectas de un plano. En efecto, si omitimos el séptimo, constituyen las suposiciones hechas por Veblen y Young para una "geometría proyectiva" sobre un plano, en su tratado clásico sobre esa materia. No es necesario que el lector sepa algo sobre geometría proyectiva, para comprender la discusión subsiguiente. Pero, ¿qué son los puntos, las rectas y los planos? El lector puede pensar que "sabe" lo que son. Puede "dibujar" puntos y rectas con lápiz y regla y quizá también convencerse de que los axiomas expresan realmente las propiedades y relaciones de estos entes geométricos. Esto es sumamente dudoso, ya que las propiedades de las marcas hechas sobre el papel pueden diferir notablemente de las que se han postulado. Pero, de cualquier modo, la cuestión de si estas marcas reales concuerdan o no, es de la competencia de las matemáticas *aplicadas* y no de las *puras*. Debe notarse que los axiomas mismos, no indican qué son "realmente" los puntos, las rectas, etc. Con el objeto de descubrir las deducciones de estos axiomas, no es indispensable saber qué debemos comprender por puntos, rectas y planos. Estos axiomas implican varios teoremas, no en virtud de la representación visual que el lector pueda asignarles, sino en virtud de su forma lógica. Los puntos, las rectas y los planos pueden ser entidades cualesquiera, indeterminadas por completo, salvo por las relaciones que expresan los axiomas.

Eliminemos, por lo tanto, toda referencia explícita a puntos, rectas y planos y con ello suprimiremos toda exhortación a la intuición del espacio al deducir algunos teoremas de los axiomas. Supongamos, entonces, que en lugar de la palabra "plano", empleamos la letra  $S$ , y en vez de la palabra "punto" usamos la frase "*elemento de  $S$* ". Evidentemente, si se considera al plano ( $S$ ) como una colección de puntos (elementos de  $S$ ), una recta puede ser considerada como una clase de puntos (elementos) que es una subclase de los puntos del plano ( $S$ ). Sustituiremos, por lo tanto, la palabra "recta" por la expresión "*clase  $L$* ". Nuestro conjunto original de axiomas se leerá como sigue.

- Axioma 1'.* Si  $A$  y  $B$  son elementos distintos de  $S$ , hay por lo menos, una *clase  $L$*  que contiene a  $A$  y a  $B$ .
- Axioma 2'.* Si  $A$  y  $B$  son dos elementos distintos de  $S$  no hay más que una *clase  $L$*  que contiene a  $A$  y a  $B$ .



Axioma 3'. Dos clases  $L$ , cualesquiera, tienen por lo menos, en común, un elemento de  $S$ .

Axioma 4'. Hay por lo menos una clase  $L$  en  $S$ .

Axioma 5'. Toda clase  $L$  contiene, por lo menos, tres elementos de  $S$ .

Axioma 6'. Todos los elementos de  $S$  no pertenecen a la misma clase  $L$ .

Axioma 7'. Ninguna clase  $L$  contiene más de tres elementos de  $S$ .

En esta serie de suposiciones no se hace referencia explícita a ninguna entidad específica. Las únicas nociones requeridas para establecerlas, son de un carácter completamente general. Las ideas de "clase", "subclase", "elementos de una clase", la relación de "pertenecientes a una clase" y la relación recíproca de una "clase que contiene a elementos", la noción de "número", son partes del equipo fundamental de la lógica. Por lo tanto, si logramos descubrir las deducciones de estos axiomas, no puede ser a causa de las propiedades del espacio como tal. (En realidad, ninguno de estos axiomas puede ser considerado como proposición; ninguno de ellos es, en sí mismo, verdadero o falso, puesto que los símbolos  $S$ , clase  $L$ ,  $A$ ,  $B$ , etc., son variables. Cada una de las variables denota alguna clase de entidades posibles; la única restricción que se les hace es que deben "satisfacer" a, o concordar con las relaciones formales expresadas en los axiomas. Pero hasta que a los símbolos se les asignen valores específicos, los axiomas son funciones proposicionales, pero no son proposiciones.)

Nuestras "suposiciones", por lo tanto, consisten en relaciones consideradas para ser válidas entre términos indefinidos. Por el lector notará que aunque ningún término es definido *explícitamente*, se ha hecho de ellos una definición *implícita*. Pueden denotar cualquier cosa con tal que lo que ellos denoten concuerde con las relaciones que expresan. Este procedimiento caracteriza la técnica matemática moderna. En Euclides, por ejemplo, se dan definiciones *explícitas* de puntos, rectas, ángulos, etc. En un tratado moderno de geometría, estos elementos son definidos, *implícitamente* mediante los axiomas. Como veremos este último procedimiento permite dar una variedad de interpretaciones a los elementos indefinidos y exhibir así una identidad de estructuras en diferentes aspectos concretos...

## IDENTIDAD ESTRUCTURAL O ISOMORFISMO

Tenemos que demostrar ahora que un conjunto abstracto, como el tratado precedentemente, puede tener más de una representación concreta y que estas diferentes representaciones, aunque sumamente distintas en contenido material, serán idénticas en estructura lógica.

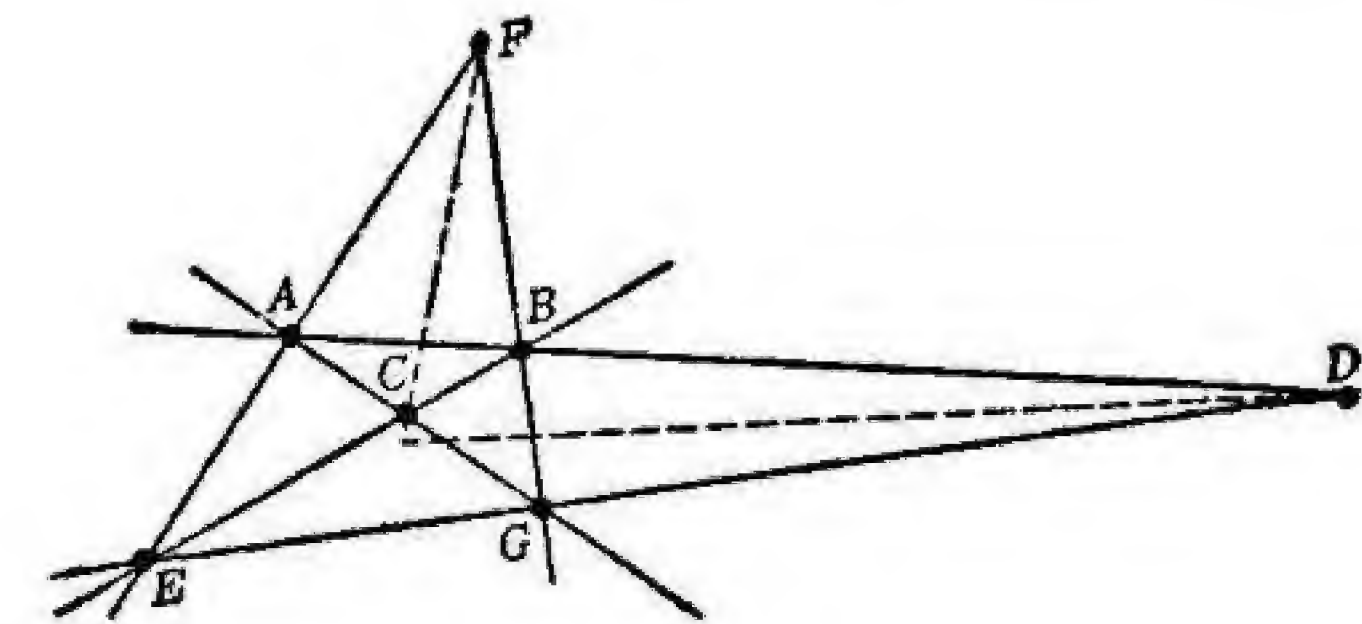
Supongamos que hay una firma bancaria constituida por siete socios. A fin de asegurarse una información experta en lo referente a los diversos valores con que operan, deciden formar siete comisiones, cada una de las cuales estudiará una actividad especial. Conviene, además, que cada socio actuará como presidente de una comisión y que cada uno de ellos participará en tres y solamente en tres comisiones. A continuación damos una lista de las comisiones y sus miembros, el primero de los cuales actúa como presidente:

Ferrocarriles nacionales	Adams	Brown	Smith
Títulos de la deuda municipal	Brown	Murphy	Ellis
Títulos de la deuda federal	Murphy	Smith	Jones
Títulos de inversiones en Sudamérica	Smith	Ellis	Gordon
Industria Nacional del Acero	Ellis	Jones	Adams
Títulos de inversiones en Europa	Jones	Gordon	Brown
Empresas de servicios públicos	Gordon	Adams	Murphy

Un examen de esta lista muestra que "satisface" los siete axiomas, si se considera a la firma bancaria como la clase  $S$ , a sus socios como los elementos y a las varias comisiones como las clases  $L$ ...

Una interpretación más, sirve de ejemplo para las mismas siete relaciones formales.

En el diagrama hay siete puntos pertenecientes, de tres en tres, a siete rectas, una de las cuales está "doblada". Si cada punto representa un elemento de  $S$  y cada conjunto de tres puntos perteneciente a una recta, una clase  $L$ , se satisfacen todas las siete suposiciones. Así, por ejemplo, la relación de tres términos entre Adams, Brown y Smith, en virtud de la cual



pertenecen a la misma comisión, se cumple para los puntos  $A, B, D$  que caen sobre la misma recta. Y, en general, lo que puede deducirse para  $A$  de las suposiciones es válido para Adams, lo que puede deducirse para  $B$  es válido para Brown, etc. Página 119.

3. Forsyth, *Geometry of Four Dimensions*. Página 124.

4. Debería insistirse en que una variedad, tal como se la define ordinariamente, está despojada de todo atributo, excepto el de ser un conjunto. Por consiguiente, es fácil pensar en muchas clases de variedades muy conocidas que nada tienen que ver con el espacio o con la geometría. Una variedad de tres dimensiones sería una clase de elementos, cada uno de los cuales requiere exactamente tres números para ser identificado —para distinguirlo de todo otro elemento de la clase. Imaginemos un cilindro que contiene una cantidad de tres gases que han sido muy bien mezclados de modo que el volumen de gas o de alguna porción del mismo, queda determinado únicamente por tres números,  $x, y$  y  $z$ , cada uno de los cuales representa el porcentaje de los tres gases componentes en la mezcla. O, un nuevo caso: Puede considerarse como una variedad a un grupo de personas. Si vemos que cinco números son necesarios y suficientes para individualizar a cada una de ellas, es decir  $x$  igual a la edad;  $y$  igual al monto de la cuenta bancaria,  $z$  el número de su teléfono,  $u$  igual a la estatura y  $v$  igual al peso, constituyen, pues, una variedad de cinco dimensiones. Pueden

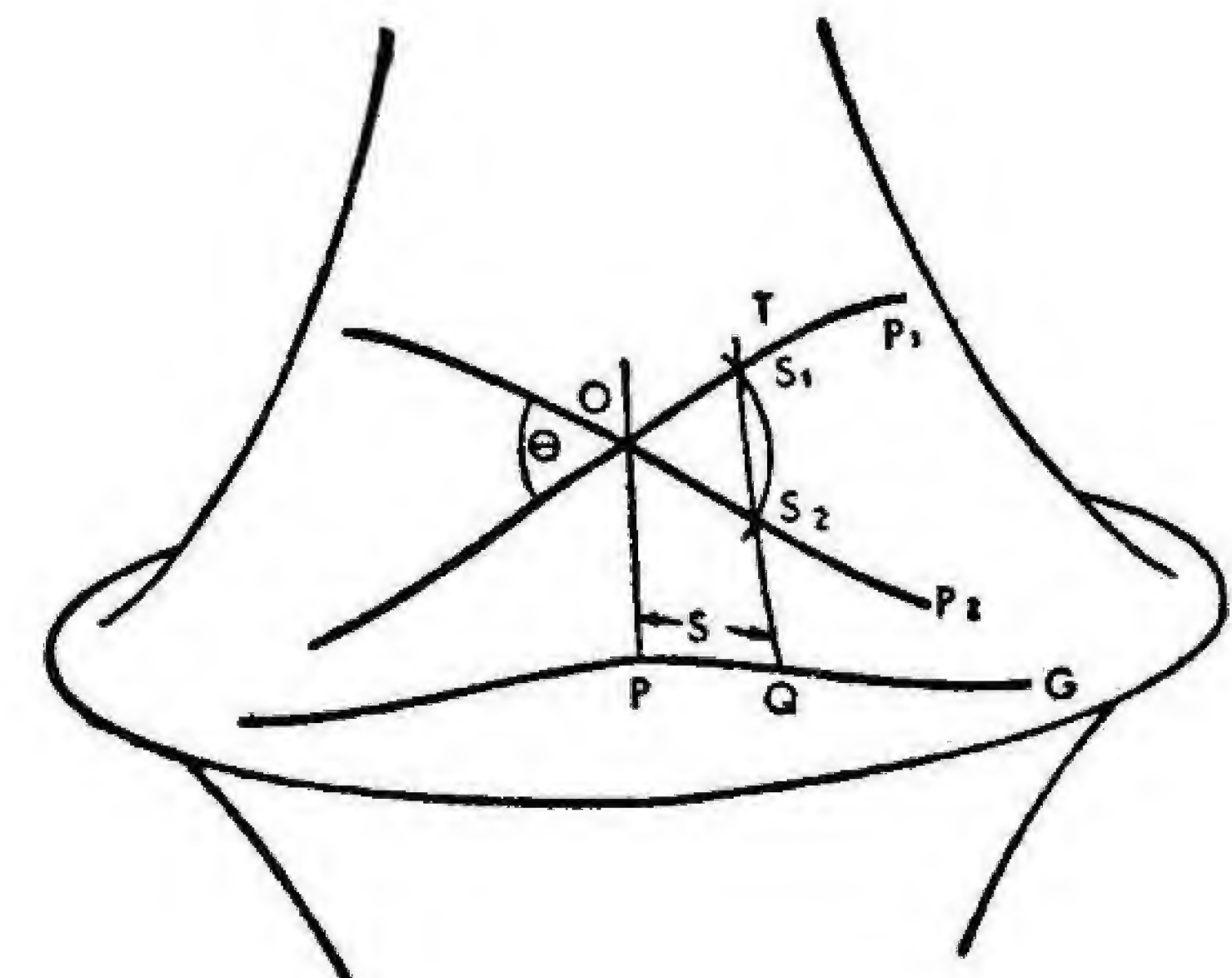


Fig. 49



idearse otros ejemplos de variedades: (a) de cuatro dimensiones, partículas de aire, 3 dimensiones para fijarlas en el espacio y 1 para fijar su densidad; (b) de cuatro dimensiones, todas las esferas concebidas en el espacio, 3 dimensiones para fijar sus centros, 1 para determinar sus radios. Página 125.

5. Nöbeling, "Die vierte Dimension und der krumme Raum" en *Krise und Neuaufbau*, Leipzig, Deuticke, 1933. Página 107.

6. Eddington, *Espacio, tiempo y gravitación*. Página 136.

7. Lindsay and Margenau, *Foundation of Physics*. Página 138.

8. *Op. cit.* Página 139.

9. Young, *Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. New York, Macmillan, 1911. Página 140.

10. Morris Raphael Cohen, *Reason and Nature*. Página 143.

11. Cohen and Nagel, *Introduction to Logic and Scientific Method*, New York, Harcourt Brace, 1934. Página 146.

12. El siguiente diagrama es un ejemplo, algo detallado, de esta proposición. Se traza una perpendicular a la línea  $G$  perteneciente a la pseudoesfera; desde un punto  $O$  deben trazarse dos paralelas a la línea  $G$ . Márquese la distancia  $S$  sobre  $G$ , determinando el punto  $Q$ . Por  $Q$  levántese una perpendicular a  $G$ . Luego, si trazamos un círculo con centro  $O$  y radio  $S$ , esta circunferencia, cortará a  $QT$  en  $S_1$  y  $S_2$ . Estos dos puntos al ser unidos con  $O$ , determinan las dos paralelas a  $G$ ,  $P_1$  y  $P_2$ . Todas las líneas que pasan por  $O$ , formando un ángulo menor que  $\theta$  no cortan a  $G$ , aun cuando no son paralelas a ella. Este diagrama lo hemos tomado de Colerus, *Vom Punkt zur vierten Dimension*, Viena, Zsolnay, 1935. Página 147.

13. Estas geometrías son indispensables en la física del átomo y de las estrellas, en regiones del espacio que no forman parte de nuestra experiencia inmediata. Página 156.

## V. PASATIEMPOS DE ÉPOCAS PASADAS Y RECIENTES

*El trabajo consiste en todo lo que un cuerpo está obligado a hacer y el juego consiste en todo lo que un cuerpo no está obligado a hacer.*

MARK TWAIN

Se ha dicho: "No es divirtiéndose como se aprende"<sup>1</sup>, y en respuesta: "Sólo divirtiéndose uno puede aprender." Donquiera que esté la verdad, en algún lugar situado entre ambos extremos, es innegable que las recreaciones matemáticas son desafío a la imaginación y un poderoso estímulo a la actividad matemática. La teoría de ecuaciones, de la probabilidad, el cálculo, la teoría de los conjuntos de puntos, de la topología, etc., son todos frutos que se han desarrollado de semillas sembradas en el fértil suelo de la imaginación creadora, pues todas ellas han nacido de problemas planteados, en un principio, en forma de rompecabezas.

Los rompecabezas y las paradojas han sido populares desde la antigüedad y, entreteniéndose con estos juguetes, los hombres aguzaron su ingenio y estimularon su inventiva. Pero no fue únicamente por entretenimiento por lo que Kepler, Pascal, Fermat, Leibniz, Euler, Lagrange, Hamilton, Caley, y muchos otros, dedicaron tanto tiempo a los rompecabezas.



Las investigaciones en las matemáticas recreativas nacieron del mismo deseo de saber, fueron guiadas por los mismos principios y requirieron el ejercicio de las mismas facultades que las investigaciones que condujeron a los más profundos descubrimientos en las matemáticas y en la física matemática. En efecto, ninguna rama de la actividad intelectual es tema más a propósito para la discusión, que los rompecabezas y las paradojas.

El campo es enorme. Se han planteado rompecabezas desde la época de los egipcios y probablemente desde antes. Desde las expresiones secretas del oráculo de Delfos, pasando por la época de Carlomagno, hasta la edad de oro de los crucigramas, las paradojas y los rompecabezas, al igual que los seres de la Tierra, han asumido todos los tamaños y formas, y se han reproducido. Podemos examinar únicamente unas pocas de las especies que predominan, aquellas que han sobrevivido de una u otra manera y continúan prosperando en forma estilizada.

La mayoría de los famosos rompecabezas inventados antes del siglo XVII pueden hallarse en el primer gran libro sobre el particular titulado: *Les problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres* cuyo autor fue Claude-Gaspard Bachet, Sieur de Meziriac. Aunque apareció en 1612, es decir, dos años antes que la obra de Napier sobre los logaritmos, sigue siendo aún hoy un libro deleitable y un filón de informaciones. Desde entonces han aparecido muchas colecciones<sup>2</sup>, que han aumentado el contenido del volumen de Bachet, ampliándolo a casi cinco veces su tamaño original.

Todo lo que esperamos poder hacer, es seguir el ilustre ejemplo de Mark Twain en un caso similar, en que trató de reducir todos los chistes a una docena de formas primitivas o elementales (suegra, hija del granjero, etc.). Intentaremos

presentar algunos de los rompecabezas típicos que servirán de ejemplo con respecto a las ideas básicas comunes a todos ellos. Limitaremos nuestro interés a los mismos y a algunos problemas, reservando para otro capítulo algunas de las más celebradas paradojas lógicas y matemáticas. Aunque no siempre pueda ser fácil establecer una distinción entre rompecabezas y paradoja, para nuestra finalidad es suficiente considerar aquéllos como un juego de ingenio o un problema, y a una paradoja, como una demostración o enunciado aparentemente engañoso y contradictorio.

A menudo los rompecabezas parecen difíciles porque no es fácil interpretarlos en términos precisos. Al intentar la solución de un problema, el método de tantear, a ver si atinamos, no sólo es más natural, sino generalmente más fácil que el ataque matemático. La experiencia diaria nos enseña que, frecuentemente, las ecuaciones algebraicas más formidables resultan más fáciles de resolver que algunos problemas formulados con palabras. Esos problemas deben traducirse primero en símbolos y luego, con estos símbolos, deben formarse ecuaciones para poder resolver el problema en sí.

Cuando Flaubert era muy joven escribió una carta a su hermana Caroline, diciéndole: "Ya que ahora estudias geometría y trigonometría, te propondré un problema. Un barco se hace a la mar desde el puerto de Boston, llevando un cargamento de lana. Desplaza 200 toneladas y tiene por destino el puerto de El Havre. Se rompe el palo mayor, el camarero está sobre cubierta, hay 12 pasajeros a bordo, el viento sopla en el cuadrante E.N.E., el reloj señala las tres y cuarto de la tarde. Es el mes de mayo. ¿Qué edad tiene el capitán?" Flaubert no solamente bromeaba, sino que estaba expresando una queja compartida por ese respetable y numeroso grupo de personas "que no son fuertes en rompecabezas" y que



consideran que la mayoría de éstos confunde y abruma con palabras superfluas<sup>3</sup>. Por esa razón los siguientes rompecabezas han sido despojados de todos los elementos innecesarios a fin de presentar su estructura matemática fundamental. Entendemos por el término “estructura matemática” algo no expresado necesariamente por números, ángulos o líneas, sino la relación interna esencial entre los elementos componentes del rompecabezas. Porque, en el fondo, eso es todo lo que el análisis matemático puede revelar, todo lo que las matemáticas significan en sí.

Entre los problemas más antiguos están aquellos que se refieren a personas que, con una embarcación, efectúan travesías de una a otra orilla de un río en condiciones más bien difíciles. Alcuino, amigo de Carlomagno, sugirió un problema que desde entonces ha sido planteado y complicado de muchas maneras. Un viajero llega a la orilla de un río llevando como únicos bienes: un lobo, una cabra y un repollo. El único bote disponible es muy pequeño y no puede llevar más que al viajero y uno de sus bienes. Desgraciadamente, si los deja juntos, la cabra se comerá el repollo y el lobo devorará a la cabra. ¿Cómo transportará el viajero sus pertenencias a la otra orilla del río, manteniéndolas intactas?<sup>4</sup> Puede intentarse la solución con ayuda de una caja de fósforos, que represente al bote y cuatro tiras de papel que son sus ocupantes.

Una versión más complicada de este problema fue sugerida en el siglo XVI por Tartaglia. Tres hermosas desposadas, con sus celosos maridos, llegan también a un río. El pequeño bote que deben tomar para efectuar el cruce sólo tiene cabida para dos personas. Para evitar cualquier situación comprometida deben disponerse las travesías de tal manera que no se deje a ninguna mujer con un hombre, a menos

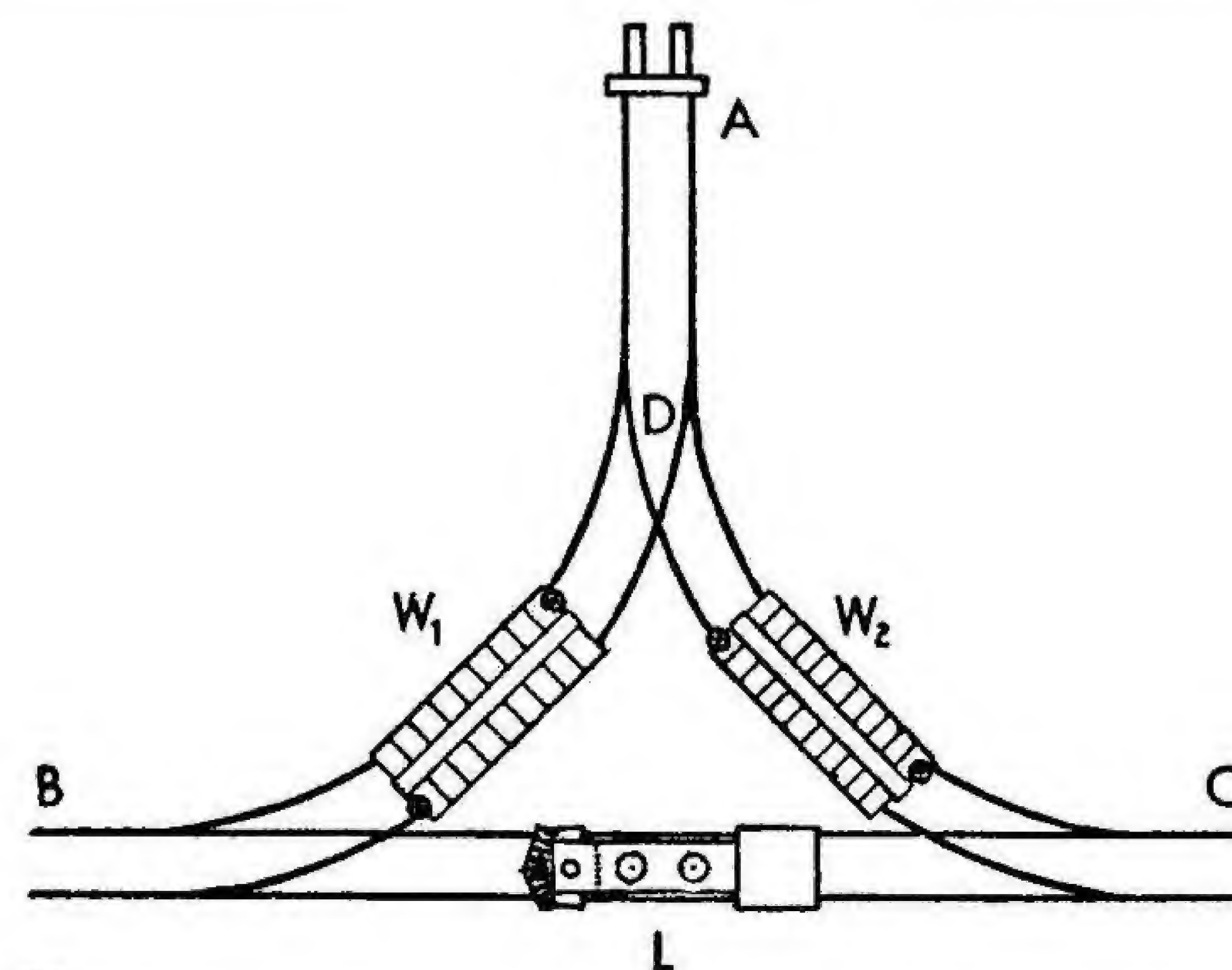


Fig. 50

que su esposo esté presente. Para ello se necesita once travesías; para dos parejas hacen falta cinco; mientras que con cuatro o más parejas sería imposible efectuar la travesía en las condiciones establecidas.

Análogos problemas se presentan en las maniobras ferroviarias. En la figura 50 hay una locomotora L y dos vagones, W<sub>1</sub> y W<sub>2</sub>. La parte común de los rieles de los dos desvíos (DA) sobre los cuales están W<sub>1</sub> y W<sub>2</sub> es suficientemente larga como para contener a uno o a otro, pero no a ambos simultáneamente ni a la locomotora L. De este modo, un vehículo en DA puede ser desviado a cualquiera de los dos desvíos. La tarea del maquinista consiste en invertir las posiciones de W<sub>1</sub> y W<sub>2</sub>. ¿Cómo puede hacerlo? Aunque este problema no presenta dificultades en particular, el mismo tema, en una forma más compleja, puede exigir del maquinista aptitudes matemáticas de un orden superior.



La familia de Simeon Poisson trató de que éste fuese de todo, desde cirujano a abogado, esto último en la teoría de que no servía para nada mejor. Inició una o dos de estas profesiones con notable ineptitud, pero al fin encontró su oficio. Durante un viaje, alguien le planteó un problema análogo al que tratamos a continuación. Resolviéndolo al instante, Poisson descubrió su verdadera vocación y de ahí en adelante se dedicó por entero a las matemáticas, llegando a ser uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX<sup>5</sup>.

Dos amigos que tienen una jarra con 8 litros de vino desean repartírselo en partes iguales. Disponen también de dos jarras vacías, una con capacidad igual a 5 litros y la otra, 3. La figura demuestra cómo pudieron dividir en dos partes de cuatro cuartos cada una<sup>6</sup>.

Esto nos recuerda otro "problema de verter líquidos", quizá no muy relacionado con el precedente, pero que constituye un buen ejercicio de rigor lógico y de refresco líquido.

## EL ROMPECABEZAS DEL BEBEDOR INTERNACIONAL DE CERVEZA

En cierta ciudad situada en la frontera entre México y los EE.UU. de Norteamérica existe, en lo que se refiere al dinero en circulación, una situación peculiar. En México, un dólar norteamericano vale sólo 90 centavos de su moneda, mientras que en Estados Unidos el valor del peso mexicano es de sólo 90 centavos de dólar. Cierta día un vaquero entra en una cantina mexicana y pide diez centavos de cerveza, que paga con un peso mexicano, recibiendo de vuelta un dólar norteamericano que vale allí, precisamente, noventa centavos. Después de beber su cerveza, cruza la frontera y penetra en una taberna norteamericana donde pide lo mismo. Paga con un dólar norteamericano y recibe un billete de un peso

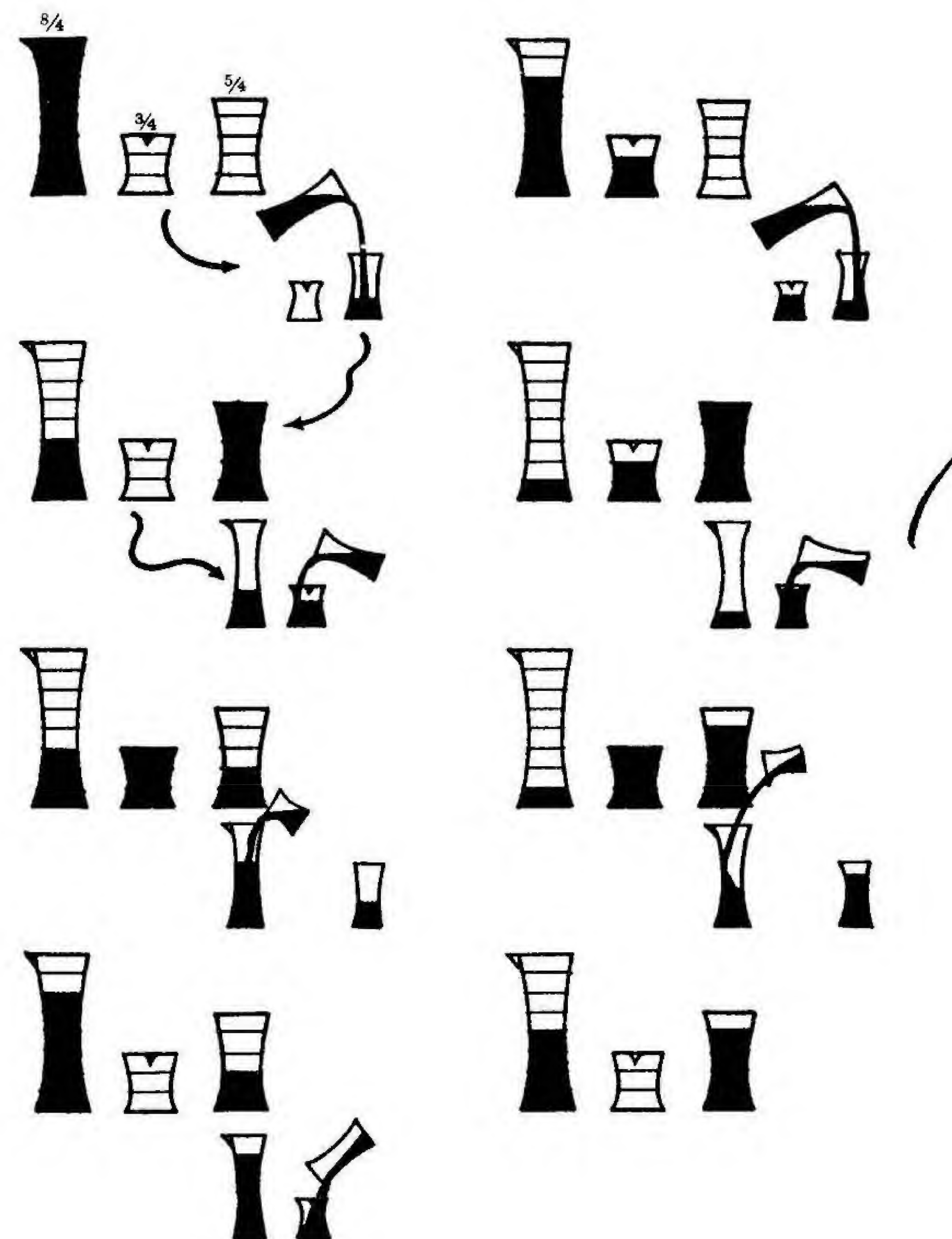


Fig. 51. Solución del problema de las 3 jarras.



mexicano de vuelta. Cruza nuevamente la frontera y repite el procedimiento, bebiendo alegremente cerveza todo el día y terminando tan rico como empezó, con un peso mexicano.

Se pregunta: ¿quién pagó la cerveza?

Moraleja: Visite el alegre país mexicano en sus vacaciones.

La naturaleza desconcertante de todo ardid aritmético radica, como ya lo hemos indicado, en su estructura, no en su contenido. Con un colador para separar las ideas esenciales, ocultas entre docenas de inútiles, todo hombre podría ser su propio mago. Nos viene a la memoria una inocente adivinanza, repetida frecuentemente entre los matemáticos: “¿Cómo podría uno cazar leones en el desierto?” se pregunta. Como hay tanta arena y tan pocos leones, sencillamente ¡tómese un colador, cuélese la arena y quedarán los leones! Luego se necesita semejante colador o tal vez un escalpelo, para poder llegar a lo esencial. Una vez eliminada la verbosidad, el esqueleto del rompecabezas sucumbe ante la simple aritmética o el álgebra. Los juegos de salón consistentes en adivinar números que otros han elegido o naipes que alguien ha escogido, parecen casi maravillosos como ejemplos de “percepción extrasensorial”. Pero después que hemos aprendido a separar los leones de la arena, enjaularlos es relativamente sencillo.

Los ardid es hechos con naipes son habitualmente rompecabezas aritméticos disfrazados. Generalmente son tratables con el análisis matemático y no son, como se cree comúnmente, ejecutados por juegos de manos. Un principio importante, pasado por alto fácilmente, es que, “al cortar una baraja de naipes nunca se alteran las posiciones relativas de las cartas, a condición que, si es necesario, consideremos a la carta que queda en la parte superior, como siguiente inme-

diata de la que está en el fondo de la baraja”<sup>7</sup>. Una vez que se ha comprendido esto, muchas tretas dejan de ser desconcertantes.

Siete jugadores de póquer se disponen a jugar con una nueva baraja. De conformidad con la tradición, en la primera mano se cortan las cartas, no se mezclan. El tallador, fingiendo defraudar a sus compañeros, toma sus segunda y cuarta cartas del final de la baraja. Todos los presentes se dan cuenta de esta falta intencional. Sin embargo, cuando los demás jugadores recogen sus cartas no están dispuestos a exigir una nueva distribución, puesto que cada uno encuentra que tiene “full”. Pero temerosos todavía de que el tallador se haya arreglado una mejor mano para sí, insisten en que descarte sus cinco naipes y tome los cinco primeros de la parte superior de la baraja. Fingiendo indignación, accede y gana con una runfla de cinco naipes del mismo palo. Pruébalo. De cien veces, noventa y nueve, usted logrará engañar a sus amigos, pero no podrá defraudar a un hombre honrado.

Frecuentemente, los ardid es aritméticos de acertar un número elegido por otro dependen de la “base de numeración”.

Cuando se expresa un número en el sistema denario, o decimal, como, por ejemplo, 3.976, lo que quiere decirse realmente es:

$$(3 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$$

La tabla<sup>8</sup> siguiente da algunos ejemplos más, de otros números escritos en base 10:

Entre la amplia variedad de problemas que surgen con el uso del sistema decimal, los siguientes son algunos de los más interesantes:

Un recurso útil para verificar la multiplicación, es el conocido con el nombre de “prueba del nueve”.



Ejemplo	$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$
469	$= 9 \times 10^0$	$+ 6 \times 10^1$	$+ 4 \times 10^2$		
	$= 9$	$+ 60$	$+ 400$		
7.901	$= 1 \times 10^0$	$+ 0 \times 10^1$	$+ 9 \times 10^2$	$+ 7 \times 10^3$	
	$= 1$	$+ 0$	$+ 900$	$+ 7.000$	
30.000	$= 0 \times 10^0$	$+ 0 \times 10^1$	$+ 0 \times 10^2$	$+ 0 \times 10^3$	$+ 3 \times 10^4$
	$= 0$	$+ 0$	$+ 0$	$+ 0$	$+ 30.000$
21.148	$= 8 \times 10^0$	$+ 4 \times 10^1$	$+ 1 \times 10^2$	$+ 1 \times 10^3$	$+ 2 \times 10^4$
	$= 8$	$+ 40$	$+ 100$	$+ 1.000$	$+ 20.000$

Consideremos el producto  $1.234 \times 5.678 = 7.006.652$ . Sumemos los dígitos del multiplicando, del multiplicador y del producto, obteniendo así 10, 26 y 26, respectivamente. Como cada uno de estos números es mayor que 9, sumemos los dígitos de cada suma individual una vez más\*, obteniendo 1, 8 y 8. (Si después de la primera repetición queda una suma mayor de 9, deben sumarse los dígitos una vez más.) Ahora tomemos el producto de los números enteros correspondientes al multiplicando y al multiplicador, es decir  $1 \times 8$ , y compáremoslo con el número entero correspondiente a la suma de los dígitos del producto, que también es ocho. Como son iguales, el resultado de la multiplicación original seguramente es correcto.

Usando la misma regla comprobemos si el producto de 31.256 por 8.427 es 263.395.312. Nuevamente, las sumas de los dígitos del multiplicando, del multiplicador y del producto son, respectivamente: 17, 21 y 34, repitiendo la suma de estos dígitos obtenemos 8, 3 y 7. El producto de los dos

\* Así  $10 = 1 + 0 = 1$   
 $26 = 2 + 6 = 8$ , etc.

primeros es 24, la suma de cuyos dígitos es 6. Pero la suma de las cifras del producto es 7. De este modo tenemos dos residuos diferentes, 6 y 7, y, en consecuencia, la multiplicación debe estar mal.

El siguiente ardid está estrechamente relacionado con la “prueba del nueve”, lo cual pone en evidencia una notable propiedad común a todos los números.

Tomemos un número cualquiera y cambiemos el orden de sus dígitos, a voluntad, para formar otro número. La diferencia entre el primero y el segundo números es siempre divisible por 9<sup>9</sup>.

Otro tipo de problema que depende de la base de numeración decimal consiste en encontrar números que puedan obtenerse multiplicando sus retrógrados por números enteros. Entre tales números de 4 dígitos, 8.712 es igual a 4 veces 2.178 y 9.801 equivale a 9 veces 1.089.

La notación *binaria* o diádica (que emplea la base 2) no es un concepto nuevo, pues se encuentran referencias a la misma en un libro chino que se cree ha sido escrito, 3.000 años antes de Jesucristo. Cuarenta y seis siglos después descubrió nuevamente Leibniz las maravillas de la base binaria y se admiraba ante ella como si fuese una nueva invención, procediendo en forma semejante a aquel ciudadano del siglo XX que, cuando le mostraron por primera vez un reloj de sol, y le explicaron su funcionamiento, exclamó espantado: “¡Dios mío, lo que no inventan en estos tiempos...!” Por valerse de sólo dos símbolos Leibniz vio, en el sistema binario, algo de gran significación religiosa y mística: Dios podía estar representado por la unidad y la nada por el cero, y ya que Dios había creado todas las formas de la nada, cero y uno combinados podían representar al Universo entero. Ansioso de impartir esta joya de sabiduría a los paganos, Leibniz la comunicó al jesuita Grimaldi, presidente del Tribunal de Matemáticas en China, en la esperanza de que éste pudie-



ra demostrar al emperador de ese país el error que cometía al seguir en el budismo, en vez de adoptar a un Dios capaz de crear el Universo de la nada.

Mientras que la notación decimal requiere de diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4... 9, la binaria usa solamente dos: 0 y 1. A continuación se indican los primeros 32 números enteros dados en la escala binaria:

Decimal		Binario	Decimal		Binario
1	=	1	17	=	10001
2	=	10	18	=	10010
3	=	11	19	=	10011
4	= 2 <sup>2</sup> =	100	20	=	10100
5	=	101	21	=	10101
6	=	110	22	=	10110
7	=	111	23	=	10111
8	= 2 <sup>3</sup> =	1000	24	=	11000
9	=	1001	25	=	11001
10	=	1010	26	=	11010
11	=	1011	27	=	11011
12	=	1100	28	=	11100
13	=	1101	29	=	11101
14	=	1110	30	=	11110
15	=	1111	31	=	11111
16	= 2 <sup>4</sup> =	10000	32	= 2 <sup>5</sup> =	100000

Ya que 2<sup>0</sup> = 1 se verá fácilmente que *cualquier* número puede expresarse como la *suma* de potencias de 2, así como cualquier número en el sistema decimal puede ser expresado como la *suma* de potencia de 10. Por ejemplo, el número expresado en el sistema decimal como 25, se indica en el sistema binario usando sólo dos símbolos 1 y 0, resultando: 11001.

Decimal

25

↓

$(2 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$

=

Binario

11001

↓

$(1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$

Pero debido a que los números pueden escribirse más brevemente usando la escala decimal, resulta ésta más conveniente que la binaria, aunque en todo otro aspecto, esta última es tan exacta y eficiente como la otra. También las fracciones tienen su representación en la notación binaria. La fracción 1/3 por ejemplo, dada por el decimal periódico puro 0,33333..., se representa, en la notación binaria, por un binario periódico puro 0,01010101...<sup>10</sup>. El sistema binario de numeración ha adquirido importancia crucial con el advenimiento de los computadores electrónicos digitales. Resulta fácil fabricar dispositivos electrónicos de dos estados, capaces de efectuar operaciones aritméticas y lógicas. (En última instancia, estos dispositivos están compuestos por interruptores, que pueden estar abiertos y no conducir, estado 0, o cerrados, conduciendo, estado 1.) Los dispositivos bi-estado permiten también traducir a circuitos las fórmulas de álgebra lógica booleana, y recíprocamente, posibilitan aplicar álgebra booleana al diseño y simplificación de circuitos. Todos los computadores digitales funcionan internamente en un sistema lógico-aritmético binario.

El sistema binario hace fácilmente comprensible la solución de problemas como los siguientes:

I. En muchas regiones de Rusia, los campesinos empleaban hasta hace poco lo que parece ser un método de multiplicación muy extraño. En esencia, el mismo sistema se usó en una época lejana en Alemania, Francia e Inglaterra y



es similar a un método usado por los egipcios 2.000 años antes de la Era Cristiana.

Con un ejemplo lo explicamos mejor: Para multiplicar 45 por 64, se forman dos columnas. En el encabezamiento de una se pone 45 y en el de la otra 64. Se multiplica una de las columnas por 2 y se divide la otra entre el mismo número sucesivamente. Cuando se divide entre 2 a un número impar, se descarta el resto. El resultado será:

	Dividir	Multiplicar
	45	64
	22	128
(A)	11	256
	5	512
	2	1024
	1	2048

Tómense de la segunda columna aquellos números que aparecen frente a un número impar de la primera columna. Súmelos y obtendrá el producto deseado:

	45	64	$64 = 2^0 \times 64$
	22	128	$= 2^1 \times 64$
(B)	11	256	$256 = 2^2 \times 64$
	5	512	$512 = 2^3 \times 64$
	2	1024	$= 2^4 \times 64$
	1	2048	$2048 = 2^5 \times 64$
			<hr/>
			2880 = 45 × 64

Puede verse fácilmente la relación existente entre este método y el sistema binario, con sólo expresar a 45 con la notación binaria.

$$\begin{aligned} 45 &= (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + \\ &\quad + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) \\ &= 101101 \\ &= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 45 \times 64 &= (2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0) \times 64 \\ &= (2^5 \times 64) + (2^3 \times 64) + (2^2 \times 64) + (2^0 \times 64) \end{aligned}$$

Ya que  $2^4$  y  $2^1$  no aparecen en la expresión binaria para 45, los productos  $(2^4 \times 64)$  y  $(2^1 \times 64)$  no están incluidos en los números que deben sumarse en (B). De este modo, lo que el campesino hace al multiplicar  $45 \times 64$  es multiplicar  $2^5$ ,  $2^3$ ,  $2^2$ ,  $2^0$  sucesivamente, por 64, y luego tomar su suma.

II. Otro problema muy conocido, ya mencionado por Cardano, consiste en quitar un cierto número de anillos de una varilla. Este rompecabezas puede analizarse mejor usando el sistema binario, aunque el manejo real de los anillos es siempre sumamente difícil.

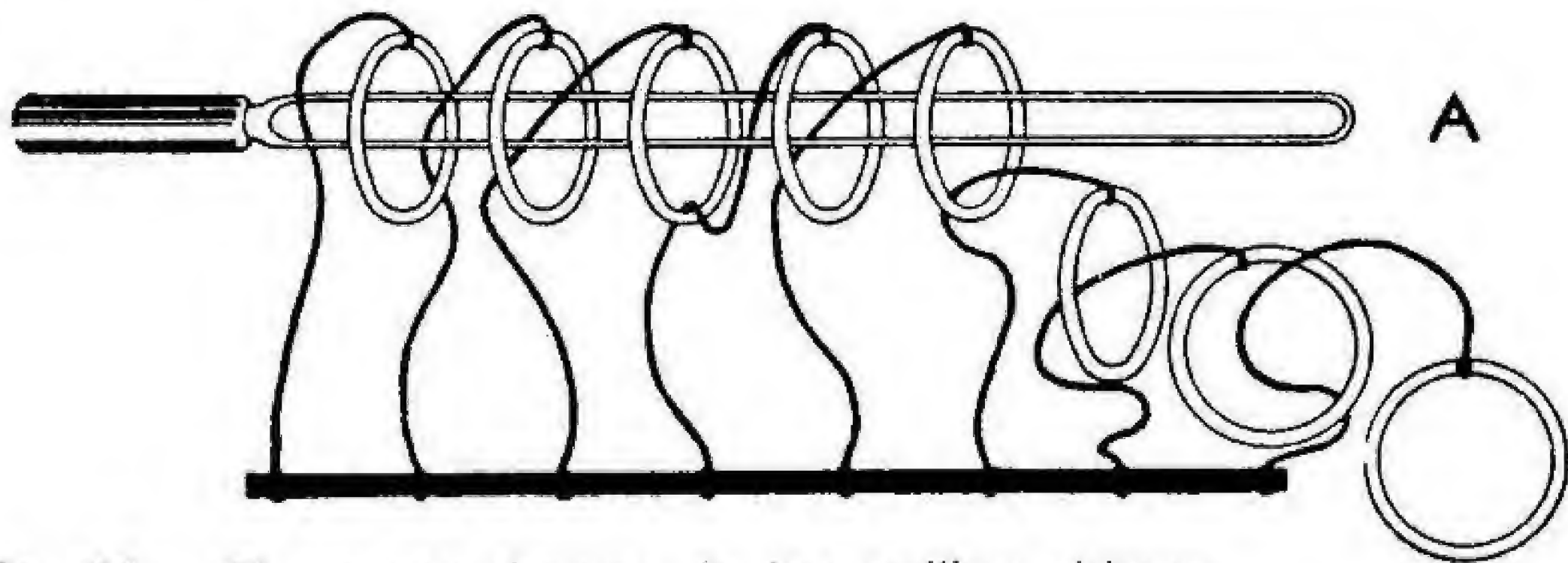


Fig. 52. El rompecabezas de los anillos chinos.

Los anillos están unidos de tal manera a la varilla, que si bien el de un extremo puede retirarse sin dificultad, cualquier



otro anillo puede ponerse o quitarse solamente cuando el que le es contiguo en la dirección del extremo (A en la figura) está sobre la varilla y todos los demás están fuera. Así, para retirar el quinto anillo, el primero, segundo y tercero deben estar fuera de la varilla y el cuarto debe estar en ella. Si la posición de todos los anillos, dentro o fuera del bastidor, se escribe utilizando la notación binaria, de manera tal que 1 designe al anillo que está afuera y 0 al que está adentro, la determinación matemática del número de pasos requeridos para retirar un número determinado de anillos, no es muy difícil. La solución, sin recurrir a la notación binaria y a medida que aumenta el número de anillos, estaría mucho más allá del poder de imaginación de uno.

III. El problema de la Torre de Hanoi tiene un principio análogo. El juego consiste en una tabla con tres clavijas, como indica la figura 53. En una de estas clavijas se coloca un número determinado de discos de varios tamaños, dispuestos de tal manera que el disco mayor quede abajo y los demás se superpongan por diámetros decrecientes, hasta llegar al disco más pequeño, que quedará en la parte superior. El problema consiste en traspasar todo el conjunto de discos

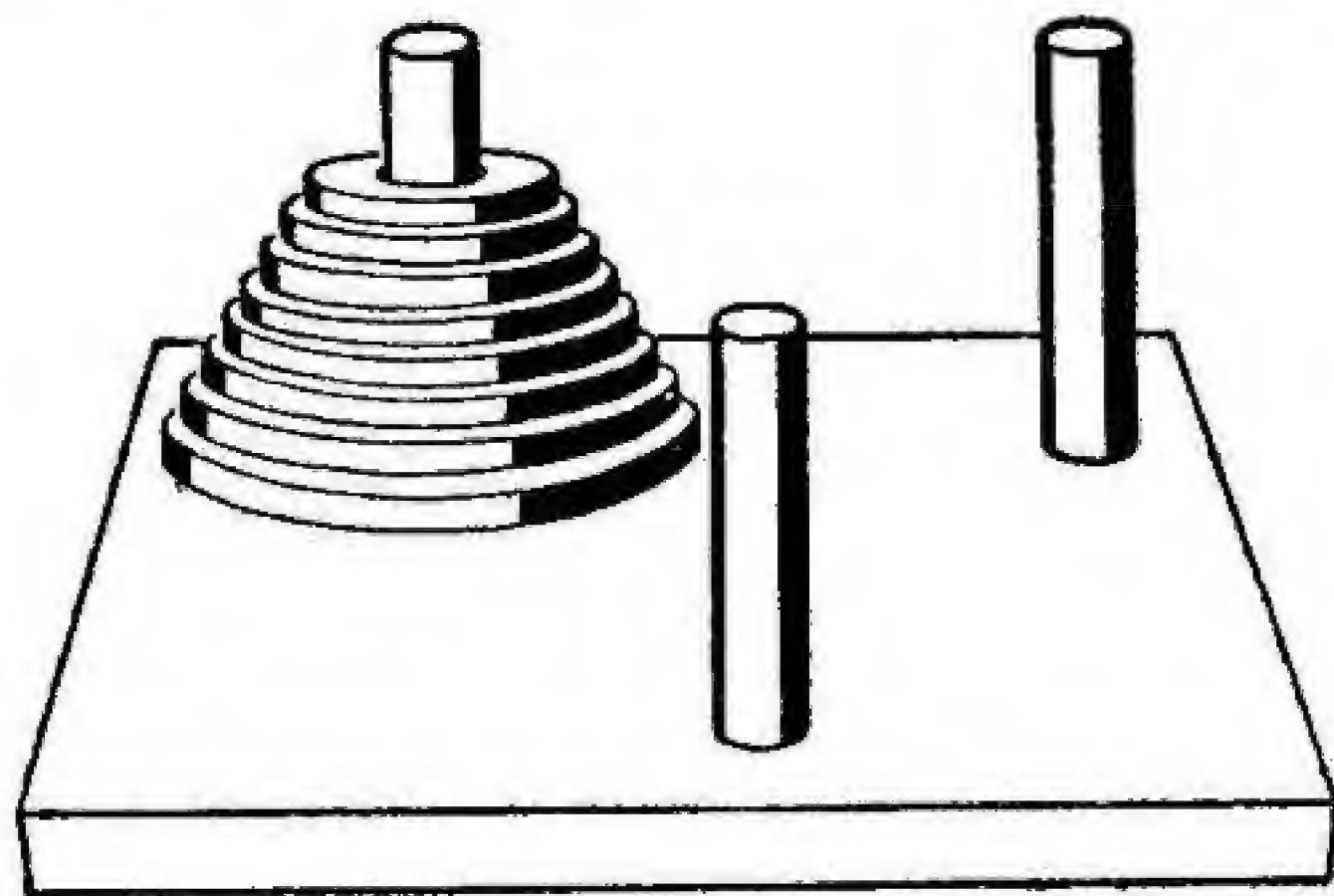


Fig. 53

a una de las otras dos clavijas, moviendo solamente un disco por vez y sin que ninguno de ellos quede colocado sobre otro de menor diámetro. Si la acción de trasladar un disco de una clavija a otra constituye un traspaso, la tabla que va a continuación indica el número de traspasos que se requieren para distintas cantidades de discos, desde 1 hasta  $n$ :

TABLA PARA TRASPASOS<sup>11</sup>

Discos	N.º de traspasos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
⋮	⋮
$n$	$2^n - 1$

Existe una leyenda encantadora acerca de este juguete<sup>12</sup>:

En el gran templo de Benarés, debajo de la cúpula que marca el centro del mundo, está colocada una placa de bronce, sobre la cual están fijadas tres agujas de diamante, cada una de las cuales tiene un codo de altura y su espesor es como el cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, cuando se creó el mundo, Dios colocó sesenta y cuatro discos de oro puro, el mayor de los cuales se apoya sobre la placa de bronce y los demás, por orden de tamaño decreciente, descansan sobre él. Esto constituye la torre de Brahma. Día y noche, incesantemente, los sacerdotes traspasan los discos de una de las agujas de diamante a la otra, de acuerdo a las leyes fijas e inmutables de Brahma, que exigen que el sacerdote mientras cumple su obligación, no debe mover más de un disco por vez y que lo debe colocar en una aguja de modo que no quede debajo de él ningún disco de menor diámetro. Cuando los sesenta y cuatro



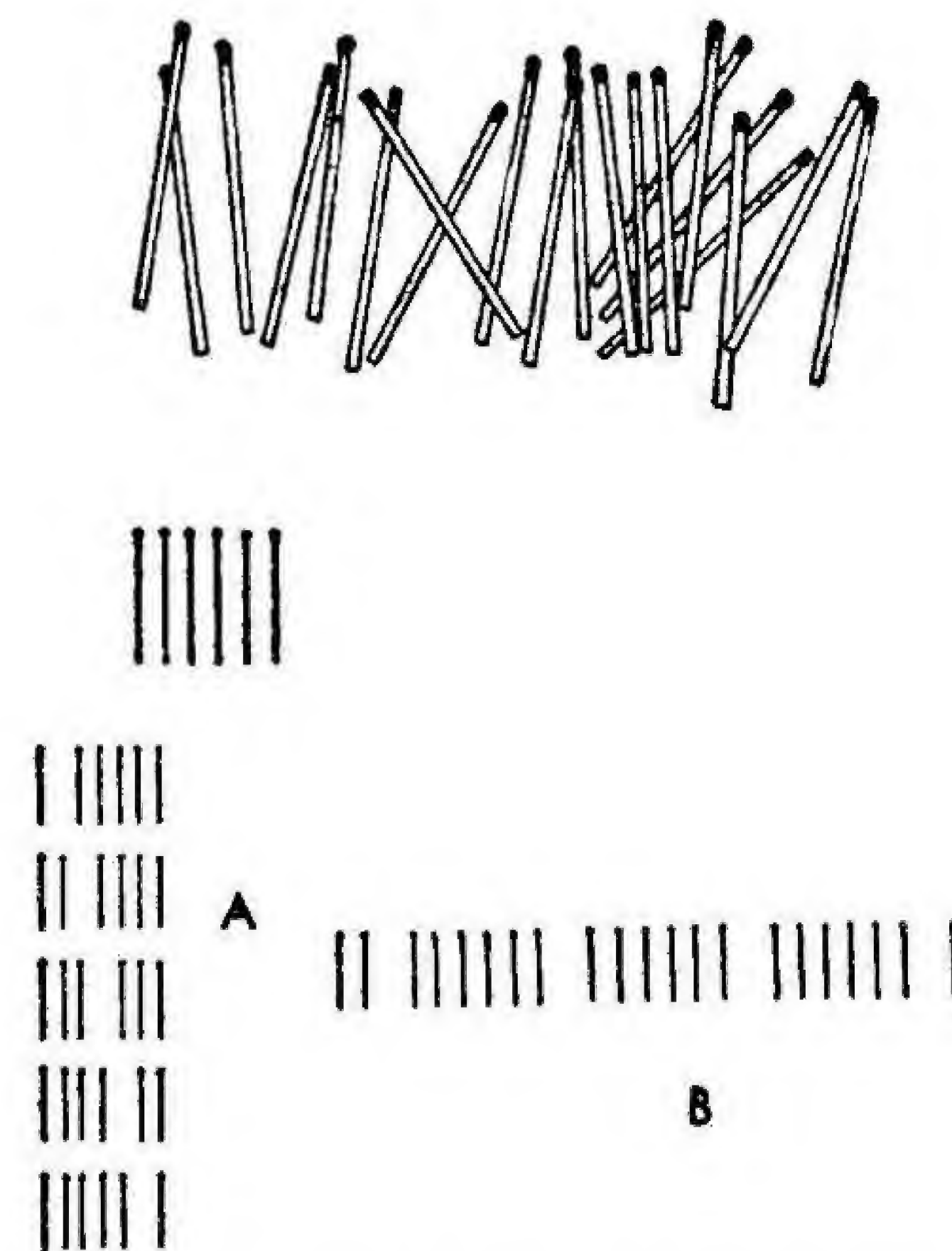
discos hayan sido traspasados de esta manera, de la aguja donde Dios los colocó, en la creación, a una de las otras dos agujas, torre, templo y brahmanes, por igual, se desmenuzará en polvo y en medio de un fragoroso trueno, el mundo desaparecerá.

El número mínimo de traspasos que se requieren para cumplir la profecía es  $2^{64} - 1$ , es decir: 18.446.744.073.709.551.615. Si los sacerdotes efectuasen un traspaso por segundo y trabajasen 24 horas diarias durante los 365 días del año<sup>13</sup>, el cumplimiento de esa hazaña les exigiría: 58.454.204.609 siglos más escasamente seis años, suponiendo que no cometiesen ningún error —puesto que un pequeño desliz anularía todo su trabajo.

IV. Puede mencionarse otro juego relacionado con el sistema binario: el denominado Nim. En el mismo, dos personas juegan por turno, con cierto número de fichas colocadas en varios montones. En su turno, un jugador retira de uno de los montones tantas fichas como le plazca. El jugador que toma la última ficha, pierde. Si se expresa en la base binaria el número de fichas de cada montón, el juego se presta fácilmente al análisis matemático. El jugador que pueda efectuar cierta distribución en el número de fichas de cada montón, puede ganar<sup>14</sup>.

Es sumamente interesante destacar que el número  $2^{64}$ , igual a 18.446.744.073.709.551.616, representado en el sistema binario por un número de 65 cifras, aparece en la solución de un problema relacionado con el origen del juego del ajedrez.

De acuerdo a una vieja fábula, el rey hindú Shirham concedió una dádiva al Gran Visir Sissa Ben Dahir por haber inventado el ajedrez. Sabiendo que éste se juega sobre un tablero de 64 cuadrados, Sissa se dirigió al rey diciéndole: "Majestad, dadme un grano de trigo para colocar en el primer cuadrado, dos para colocar en el segundo, cuatro granos



**Fig. 54.** Este diagrama da un ejemplo de cómo se gana una jugada de Nim. Supóngase que cada jugador, en su turno, debe retirar un fósforo como mínimo y cinco como máximo. La regla del juego estipula que el jugador que levanta el último fósforo pierde. Por ejemplo, imagínese que el montón original consiste en 21 fósforos. En ese caso, el que juega primero puede ganar dividiendo mentalmente los fósforos en grupos de 1, 6, 6, 6 y 2 (como se indica en B). Ya que juega primero levanta dos fósforos. Luego, por muchos que su contrario levante, el primer jugador toma el complemento de 6. Esto está indicado en A: Si el segundo jugador toma 1, el primero toma 5; si el segundo toma 2, el primer jugador toma 4 y así sucesivamente. Cada uno de los tres grupos de 6 se termina de esta manera y el segundo jugador queda con el último fósforo. Si hubiese habido, por ejemplo, 47 fósforos, el agrupamiento para que el primer jugador ganara, habría sido: 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6 y 4. Pueden formularse fácilmente las reglas para cualquier otra variante de Nim.



de trigo para colocar en el tercero y ocho para poner en el cuarto y así. ¡Oh, Rey!, dejadme cubrir cada uno de los 64 cuadrados del tablero.” “¿Y, eso es todo lo que deseas, Sissa?”, exclamó el rey estupefacto. “Oh, Señor”, repuso Sissa “he pedido más trigo que el que hay en todo vuestro reino, más aún, más trigo que el que hay en todo el mundo, en verdad, suficiente para cubrir toda la superficie de la Tierra hasta una altura igual a la vigésima parte de un codo”<sup>15</sup>.

Ahora bien, el número de granos de trigo que Sissa pedía es  $2^{64} - 1$ , exactamente el mismo que el de los traspasos de discos que se requerían para cumplir la profecía de Benarés ya relatada.

Otra forma notable en la que aparece  $2^{64}$  es al calcular el número de los antepasados de cada persona, desde el comienzo de la Era Cristiana —precisamente alrededor de 64 generaciones. En ese lapso, suponiendo que cada persona tiene 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, etc., excluyendo las uniones ilegítimas, cada persona tiene, por lo menos  $2^{64}$  antepasados, o poco menos que diez y ocho y medio trillones de parientes. ¡Una reflexión de lo más desalentadora!

El problema de Josefo es uno de los más famosos y, sin duda, uno de los más antiguos. Generalmente narra la historia de cierto número de personas que iban a bordo de un barco, algunas de las cuales debían ser sacrificadas a fin de evitar que naufragara la embarcación. Según las distintas épocas en que se escribió la versión de este problema, los pasajeros eran cristianos y judíos, cristianos y turcos, holgazanes y estudiosos, negros y blancos, etc. Algún alma ingeniosa, con conocimientos de matemáticas, siempre se arreglaba para proteger al grupo favorito. Para ello disponía a todos en un círculo y, contando desde determinado punto, progresivamente, cada  $n$ -ésima persona debía ser arrojada al

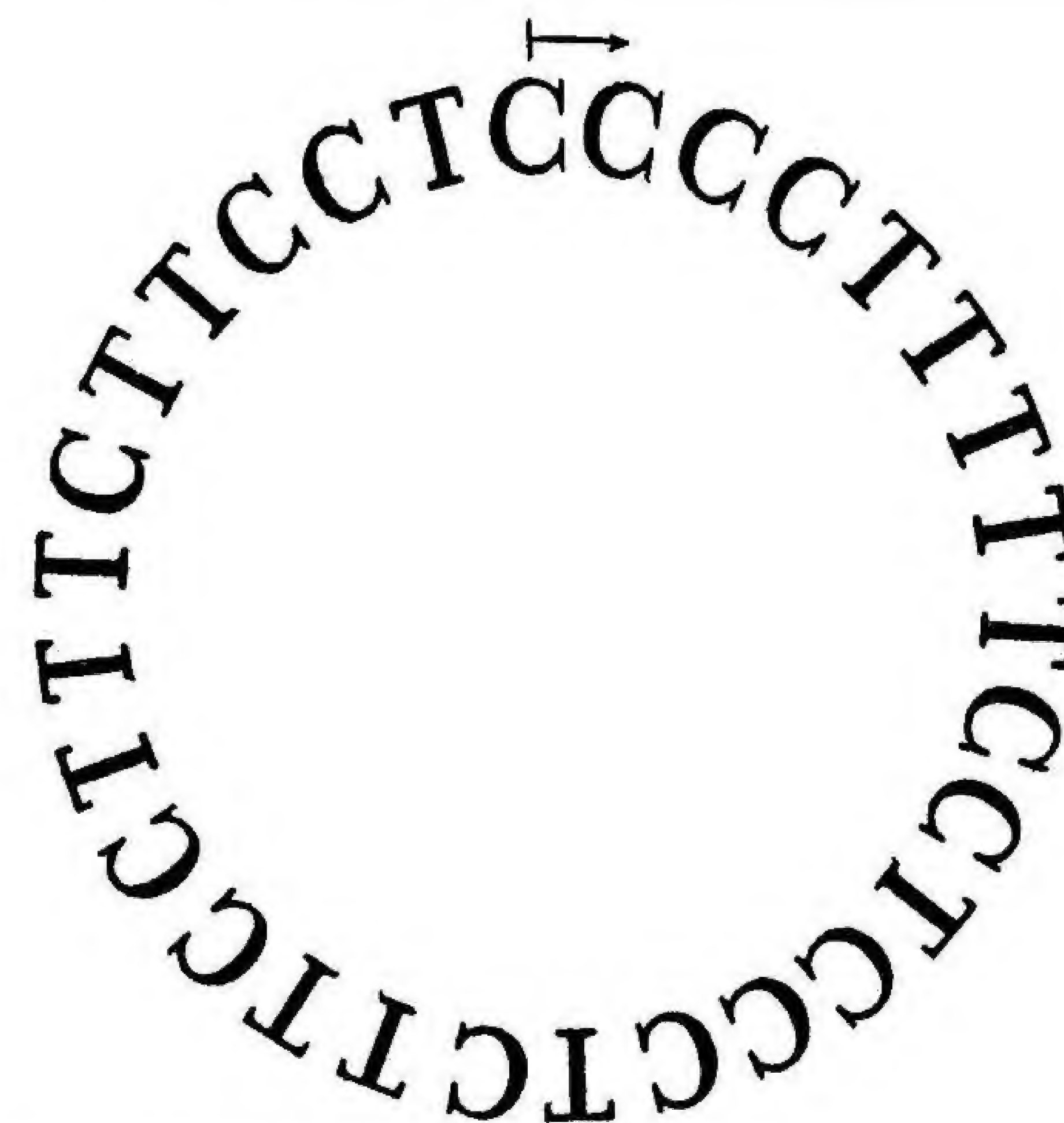


Fig. 55. C = Cristianos. T = Turcos.

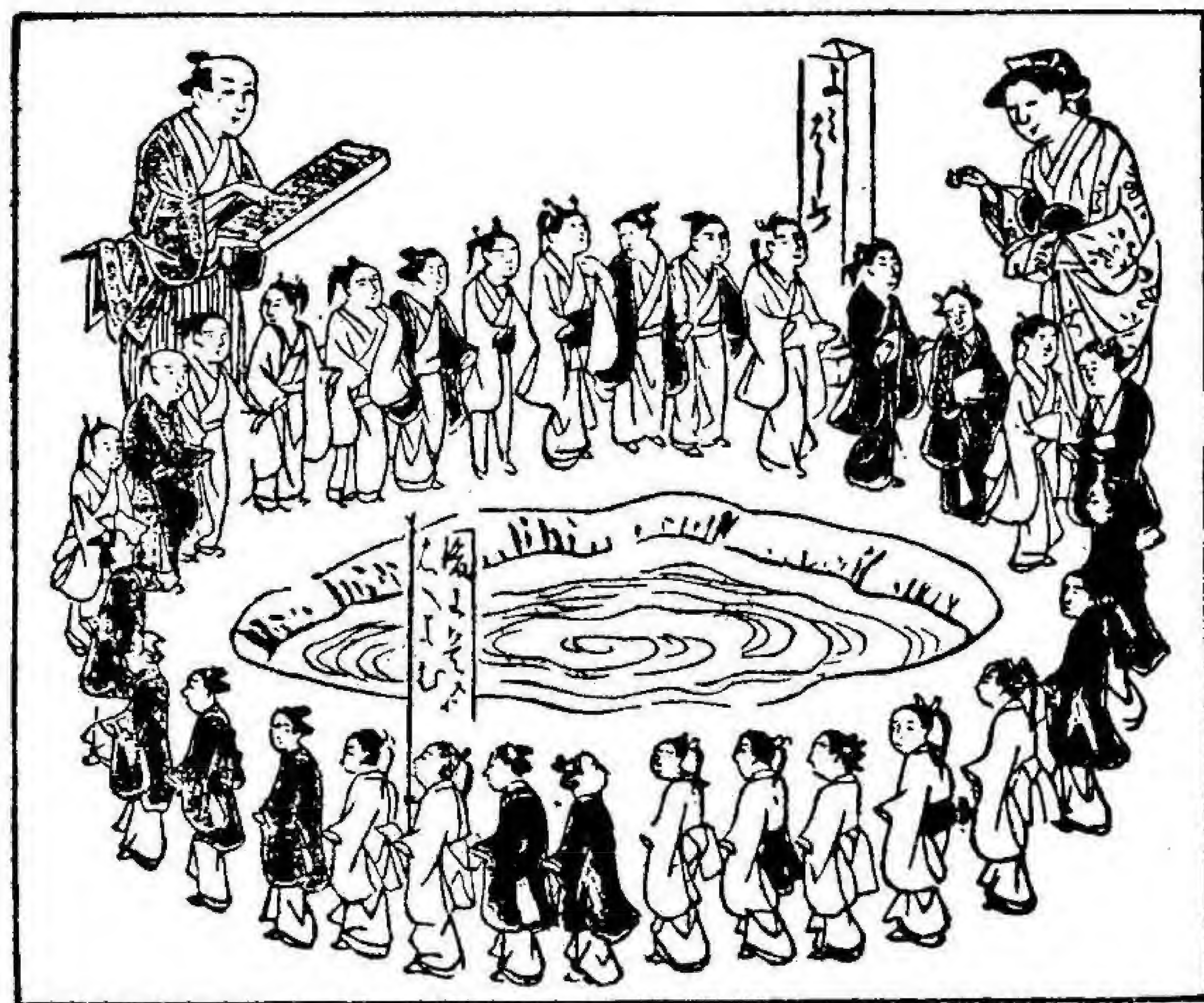
mar, siendo  $n$  un número entero especificado. La disposición del círculo hecha por el matemático era tal, que tanto los cristianos como los escolares aplicados o los blancos —en otras palabras, el supuesto grupo superior— se salvaba, en tanto que el resto era arrojado al agua de acuerdo con la Regla de Oro.

En sus orígenes, esta fábula se atribuyó a Josefo, quien se encontró en una caverna con otros 40 judíos, resueltos a autoexterminarse para escapar a una suerte peor si caían en manos de los romanos. Josefo decidió salvar su persona. Colocó a todos en círculo y convino con ellos en que cada ter-



cera persona, contando alrededor, debía matarse. Colocándose él y otra alma privilegiada en las posiciones 16 y 31 del círculo de 41, lograron salvarse, pues habiendo quedado al último pudieron eludir convenientemente el camino al martirio.

Una versión posterior de este problema, coloca a 15 turcos y a 15 cristianos a bordo de un barco, sorprendidos por una gran tormenta y que se hundirá a menos que la mitad de sus pasajeros, sean arrojados al mar. Después de colocarse formando un círculo, los cristianos propusieron, *ad majorem Dei gloriam*, que cada novena persona fuese sacrificada.



**Fig. 56.** El problema de Josefo, de la obra *Shojutsu* de Miyake Kenryu. (Tomado del libro *A History of Japanese Mathematics* de Smith y Mikami.)

De este modo se libraron de todos los infieles y los verdaderos cristianos se salvaron<sup>16</sup>.

Entre los japoneses, el problema de Josefo se presenta en otra forma: Treinta niños, 15 del primer matrimonio y 15 del segundo, se ponen de acuerdo en que la herencia de su padre es muy pequeña para ser dividida entre todos ellos. Entonces la segunda esposa propone que todos los niños se coloquen formando un círculo a fin de determinar los herederos de su esposo mediante un proceso de eliminación. Siendo una prudente matemática, así como una proverbialmente malvada madrastra, dispone los niños de tal manera que uno de los suyos resulte elegido. Una vez que se han eliminado 14 de los niños del primer matrimonio, el que queda, evidentemente matemático más astuto que su madrastra, propone comenzar de nuevo el recuento, pero en sentido contrario. Segura de las ventajas adquiridas y dispuesta, por lo tanto, a un rasgo de generosidad, ella accede, pero descubre, aterrada, que todos sus 15 hijos son eliminados, quedando solamente el del primer matrimonio que resulta entonces único heredero<sup>17</sup>.

Soluciones matemáticas más completas de versiones más difíciles y generalizadas del problema de Josefo, fueron dadas por Euler, Schubert y Tait.

Ningún estudio sobre rompecabezas, por breve que sea, puede omitir la mención del más conocido entre los muchos que inventó Sam Loyd. "El rompecabezas del 15", "le Jeu de Taquin" son algunos de sus nombres. Durante varios años después de su aparición en 1878, este rompecabezas disfrutó de una popularidad, principalmente en Europa, mayor que la que hoy gozan el "rock" y el "bridge" juntos. En Alemania lo jugaban en las calles, en las fábricas, en los palacios reales y en el Reichstag. Los patronos se vieron obligados a colocar carteles prohibiendo a sus empleados jugar "El rompecabezas del 15" durante las horas de trabajo, so pena de multa o



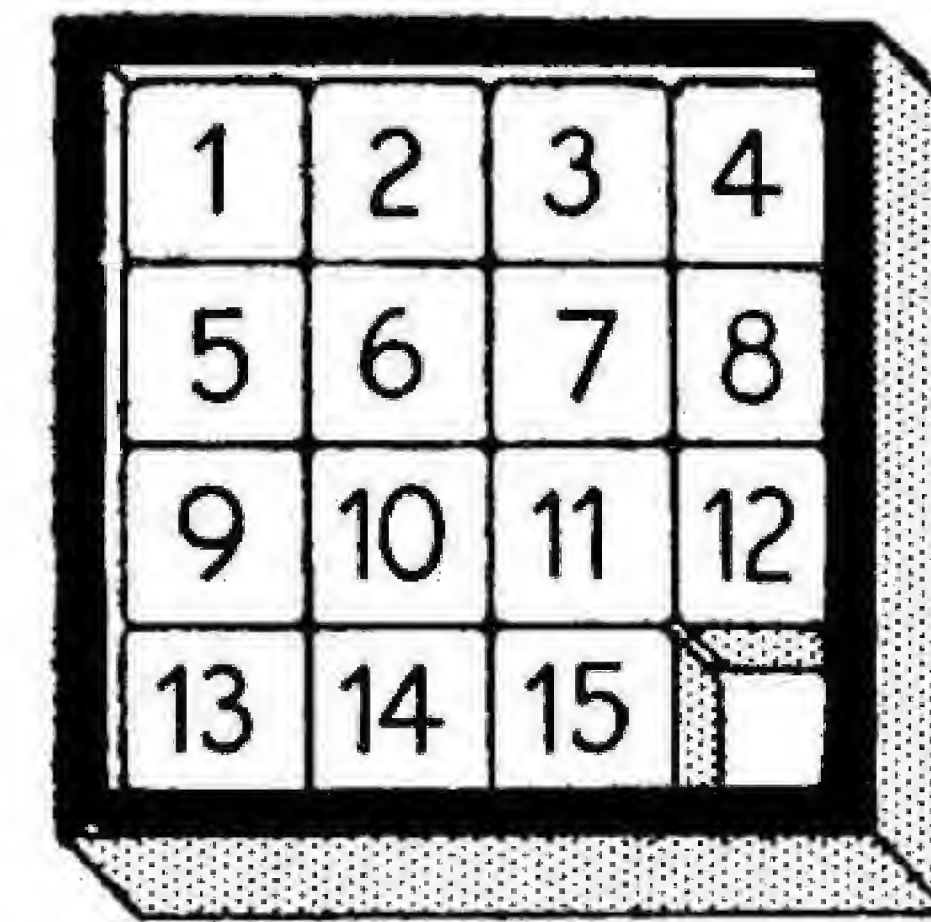
despido. Los electores, careciendo de dichos privilegios, tenían que resignarse a contemplar a sus representantes jugar al "15" en el Reichstag mientras Bismarck también lo jugaba. En Francia, el "Jeu de Taquin" se jugaba en los "boulevards" de París y en toda aldea insignificante desde los Pirineos hasta la Normandía. Según un periodista francés de la época, el "Jeu de Taquin" era un azote de la humanidad —peor que el tabaco y el alcohol— "y el origen de incalculables dolores de cabeza, neuralgias y neurosis".

Durante un tiempo, el "rompecabezas del 15" fue la locura de toda Europa. Se realizaron torneos y se ofrecieron premios fabulosos por la solución de problemas aparentemente sencillos. Pero lo raro fue que nadie pudo ganar alguno de estos premios y los problemas, aparentemente simples, quedaron sin resolverse.

El "rompecabezas del 15" (v. la siguiente fig.), consiste en una caja cuadrada, de madera o metal, poco profunda, que contiene 15 pequeños bloques cuadrados numerados del 1 al 15. En realidad hay lugar para 16 bloques, de manera que, habiendo solamente 15, los mismos pueden moverse e intercambiar sus posiciones. El número de posiciones concebibles es:  $16! = 20.922.789.888.000$ . El problema consiste en efectuar un determinado arreglo de los bloques partiendo de una posición inicial dada, que frecuentemente es la denominada *normal* y que se indica en la figura 57.

Poco tiempo después de la invención de este rompecabezas, dos matemáticos norteamericanos<sup>18</sup> demostraron que, a partir de un orden inicial dado, sólo podían obtenerse realmente la *mitad* de todas las posiciones concebibles. De este modo, hay siempre aproximadamente diez billones de posiciones que el poseedor de un "rompecabezas del 15" puede realizar y otras tantas que no puede.

El hecho de existir posiciones imposibles permite comprender fácilmente el porqué de los tan generosos premios



**Fig. 57.** El rompecabezas del 15 (también rompecabezas Boss o "Jeu de Taquin") en la posición normal.

en efectivo ofrecidos por Loyd y otros, ya que los problemas para los cuales se ofrecían las recompensas, siempre implicaban posiciones imposibles. Y es doloroso pensar en las jaquecas, neuralgias y neurosis que podrían haberse evitado —sin contar los beneficios que ello hubiese deparado al Reichstag— si *The American Journal of Mathematics* hubiese circulado tan ampliamente como el rompecabezas mismo. Con diez billones de soluciones posibles, habría quedado aún suficiente diversión para todos.

En la posición normal (fig. 57), el espacio vacío está en la esquina inferior derecha. Cuando se realiza un análisis matemático del rompecabezas, es conveniente considerar que un cambio en el orden de los bloques no consiste en otra cosa que en mover el espacio vacío según una trayectoria especificada, asegurándose siempre que termine su recorrido en la esquina inferior derecha de la caja. A fin de que esto suceda, el espacio vacío debe recorrer el mismo número de casillas, tanto a la izquierda como a la derecha y a través del mismo número de casillas hacia arriba que hacia abajo. En



otras palabras, *el espacio vacío debe moverse a través de un número par de casillas*. Si partiendo de la posición normal, puede obtenerse la que se desea obrando de acuerdo con este requisito, la posición es *posible*, en caso contrario es *imposible*.

Basándose en este principio, el método para determinar si una posición es posible o imposible, es muy sencillo. En la posición normal, cada bloque aparece en su correspondiente orden numérico, es decir, mirando las casillas, fila por fila, de izquierda a derecha, ningún número precede a otro menor que él. Para obtener una posición diferente de la normal, debe cambiarse el orden numérico de los bloques. Algunos números, quizá todos, precederán a otros menores que ellos. Cada vez que un número precede a otro menor que él, se denomina una *inversión*. Por ejemplo, si el número 6 está delante de los números 2, 4 y 5, esto constituye una inversión a la que asignaremos el valor 3, por cuanto 6 precede a tres números menores que él. Si la suma de los valores de todas las inversiones en una posición dada es par, la posición es posible, es decir, puede obtenerse de la posición normal. Si la suma de los valores de las inversiones es impar, la posición es imposible y no puede obtenerse de la configuración normal.

La posición indicada en la figura 58 puede producirse partiendo de la posición normal ya que la suma de los valores de las inversiones es 6, un número par.

2	1	4	3
6	5	8	7
10	9	12	11
13	14	15	

Fig. 58

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
15	14	13	

Fig. 59

Pero la posición que muestra la figura 59 es imposible, ya que, como se ve fácilmente, la suma del valor de las inversiones es impar.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
15	14	13	

11	7	4	
8	13	1	2
5	10	3	9
15	12	14	6

2	4	6	8
10	11	12	13
3	5	7	9
15	1	14	

Fig. 60(a, b, c)

Las figuras 60a, b y c, son ejemplos de otras tres posiciones. ¿Son ellas posibles o imposibles de obtener a partir del orden normal?

A principios de 1981 fue puesto a la venta en Europa y Estados Unidos el "cubo de Rubik", rompecabezas sumamente ingenioso, y de gran dificultad, semejante en ciertos aspectos al rompecabezas de Loyd, particularmente, en la característica necesidad de sacrificar logros parciales para poder alcanzar otros mayores. Durante dos o tres años, el cubo de Rubik provocó una fiebre similar al "Jeu de Taquin". No obstante, y a pesar de haberse creado modelos reducidos, de bolsillo, no hay constancia de que se jugara en el Parlamento, mostrando los diputados manifiesta preferencia por la lectura de periódicos.

## PROBLEMA DE LA ARAÑA Y DE LA MOSCA

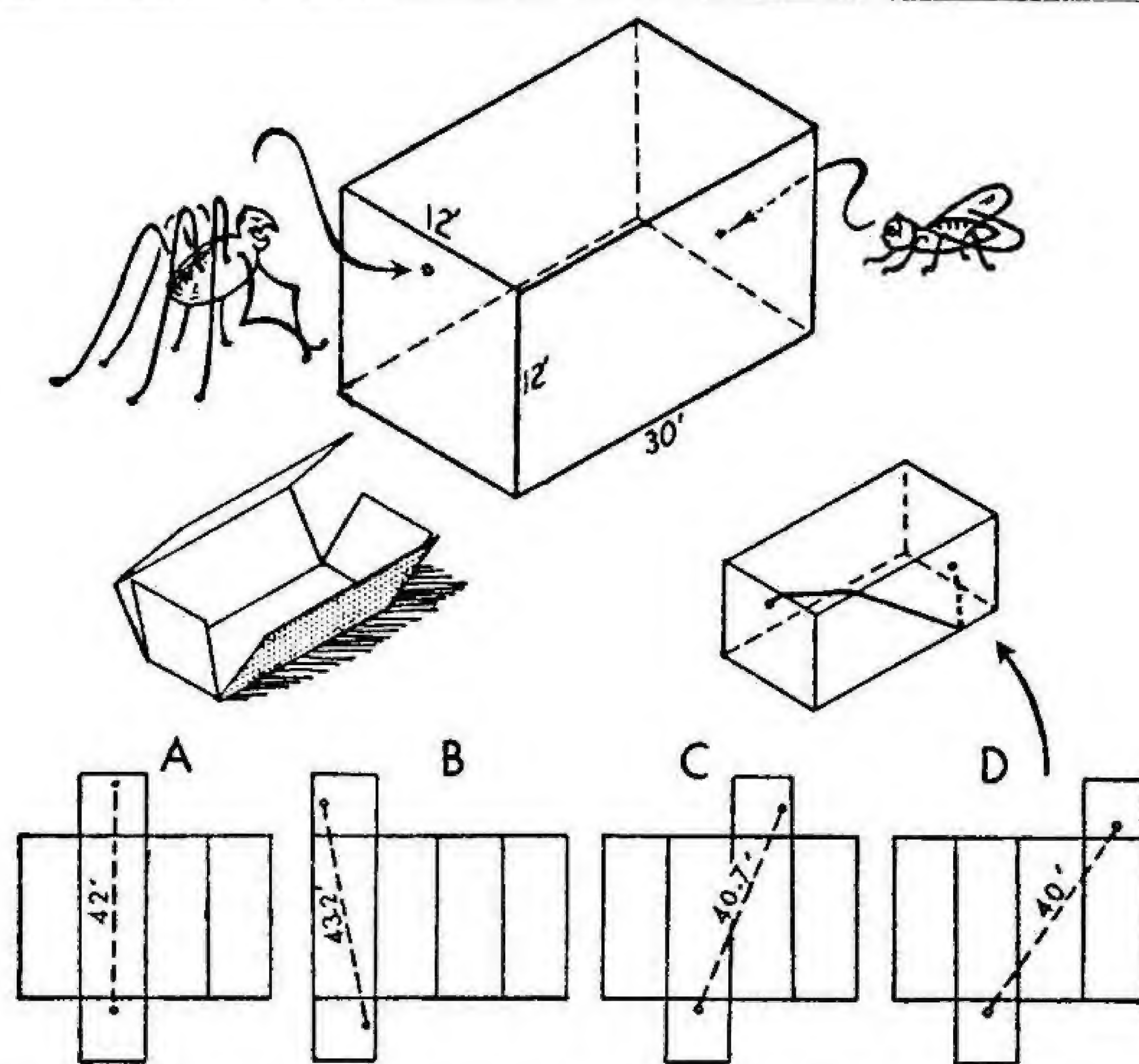
La mayoría de nosotros hemos aprendido que una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Al aplicar esta proposición a la Tierra sobre la cual vivimos, vemos que



es, al mismo tiempo, inútil y falsa. Como ya hemos visto en el capítulo anterior, los matemáticos del siglo XIX, Riemann y Lobachevski, discernieron que esa proposición, si acaso es cierta, sólo puede aplicarse a superficies especiales. No tiene aplicación para una superficie *esférica* en la cual la distancia mínima entre dos puntos es el arco de un círculo máximo. Ya que la forma de la Tierra es aproximadamente la de una esfera, la menor distancia entre dos puntos, en cualquier lugar de la superficie terrestre, *nunca* es una línea recta, sino una porción del arco de un círculo máximo (v. cap. anterior).

Sin embargo, para todos los fines *prácticos*, aun en la superficie de la Tierra, la distancia más corta entre dos puntos está dada por una línea recta. Es decir, al medir distancias corrientes con una cinta métrica o una regla graduada, el principio enunciado es sustancialmente correcto. Sin embargo, para distancias que superan unos pocos centenares de metros, debe tenerse en cuenta la curvatura de la Tierra. Cuando se construyó recientemente en una gran fábrica de automóviles de Detroit una barra de acero de más de 600 pies de longitud (más de 180 metros), se vio que era imposible la medición exacta de su longitud sin tener en cuenta la curvatura de la Tierra. Ya hemos señalado que la determinación de una geodésica es muy difícil para superficies complicadas. Pero podemos plantear un rompecabezas que nos demostrará cuán engañoso puede ser este problema, aun tratándose del caso más sencillo: la superficie plana.

En un cuarto de 30 pies de longitud, 12 de ancho y 12 de altura hay una araña en el centro de una de las paredes menores, a un pie del cielo raso y también hay una mosca en el medio de la pared opuesta, a un pie del piso. La araña tiene intenciones fáciles de concebir con respecto a la mosca. ¿Cuál es la ruta más corta posible según la cual la araña puede arrastrarse para alcanzar su presa? Si se pone en marcha en línea recta descendiendo por la pared, luego



**Fig. 61.** Habiendo la mosca rechazado su cordial invitación, la araña se pone en marcha para almorzar siguiendo la ruta más corta posible. ¿Qué trayectoria representa la geodésica para la familia araña?

en línea recta a lo largo del piso y ascendiendo luego, también en línea recta, por la otra pared, o bien siguiendo una ruta análoga pasando por el cielo raso, la distancia a recorrer es de 42 pies. ¡Con toda seguridad que es imposible imaginar un recorrido menor! Sin embargo, recortando una hoja de papel, que cuando está doblada convenientemente forma un modelo del cuarto (véase la fig. 61) y uniendo con una línea recta los puntos que representan a la araña y a la mosca, se obtiene una geodésica. La longitud de esta geodésica es



sólo de 40 pies, en otras palabras, dos pies más corta que la ruta “evidente” al seguir líneas rectas.

Hay varias maneras de recortar la hoja de papel y, de acuerdo a ellas, hay varias rutas posibles, pero la de 40 pies es la más corta y, lo que es más extraordinario, como puede verse en el corte *D* de la figura 61, este recorrido obliga a la araña a pasar por 5 de las 6 caras que forman el cuarto.

Este problema revela gráficamente el punto sobre el cual siempre insistimos —que nuestras nociones intuitivas acerca del espacio, nos conducen, casi invariablemente, por el mal camino.

## PARENTESCOS

Ernesto Legouvé<sup>19</sup>, el bien conocido dramaturgo francés, relata en sus memorias que, mientras se bañaba en la playa de Plombières, propuso a sus compañeros el siguiente problema: “¿Es posible que dos hombres, sin parentesco alguno entre sí, puedan tener la misma hermana?” “No, eso es imposible”, dijo al instante un escribano. Un abogado que no se apresuró tanto a dar su respuesta, decidió, después de cierta deliberación, que el escritor tenía razón. Al punto, los demás convinieron rápidamente en que eso era imposible. “Pero es posible”, hizo notar Legouvé, “y nombraré a dichos hombres. Uno de ellos es Eugenio Sue y el otro soy yo”. En medio de exclamaciones de asombro se le pidió que lo explicara; llamó al bañero pidiéndole una pizarra sobre la cual anotaba los nombres de los bañistas y escribió:

(~ significa casada con; | significa hijo de)

Sra. Sue ~ Sr. Sue	Sra. Sauvais ~ Sr. Sue
Eugenio Sue	Flora Sue

Sra. Sauvais ~ Sr. Legouvé

|  
Ernesto Legouvé

“Como ustedes ven”, concluyó, “es completamente posible que dos hombres tengan la misma hermana, sin estar emparentados entre sí”.

La mayor parte de los rompecabezas que hasta aquí hemos tratado, han requerido cuatro pasos para su solución:

1. Separar los hechos esenciales.
2. Traducir estos hechos en símbolos adecuados.
3. Formar ecuaciones con estos símbolos.
4. Resolver las ecuaciones.

Para resolver los problemas de parentesco deben modificarse dos de estos pasos. Un simple diagrama reemplaza a la ecuación algebraica, y las deducciones que del mismo se hagan, reemplazan a la solución algebraica. Sin los símbolos y diagramas los problemas pueden resultar sumamente confusos.

Alexander MacFarlane, un matemático escocés, desarrolló un “álgebra de parentescos” que se publicó en las actas de la Real Sociedad de Edimburgo, pero los problemas a los cuales aplicó su cálculo podían resolverse fácilmente sin él. MacFarlane utilizó el muy conocido retintín:

Ni hermanos y hermanas no tengo yo;  
pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre

como cobayo para su cálculo, aunque el método de los diagramas da la solución mucho más rápidamente.

Un viejo cuento de hadas hindú crea una intrincada serie de parentescos que probablemente habrían puesto a prueba al álgebra de MacFarlane. Un rey, destronado por sus parien-



tes, se vio obligado a huir con su esposa y su hija. Durante su fuga fueron atacados por salteadores y mientras se defendían el rey fue muerto, aunque su esposa y su hija se las ingeniaron para escapar. Pronto llegaron a un bosque en el cual el príncipe del vecino país y su hijo estaban cazando. El príncipe (que era viudo), y su hijo (soltero y buen partido) advirtieron las huellas de la madre y la hija y decidieron seguirlos. El padre declaró que se casaría con la mujer de la huella más grande —indudablemente la de más edad— y el hijo afirmó otro tanto con respecto a la mujer de huellas más pequeñas y que, seguramente, era la menor. Pero al regresar al castillo el padre y su hijo descubrieron que el pie más pequeño era el de la madre y que el pie grande pertenecía a la hija. Sin embargo, sobreponiéndose a su desengaño, se casaron tal como lo habían planeado. Después de las bodas, tanto la madre, nuera de su hija, como la hija, suegra de su madre, tuvieron hijos e hijas. La tarea de desenmarañar los parentescos resultantes se la confiamos al lector, así como la explicación del siguiente verso hallado en una vieja lápida sepulcral de Alencourt, cerca de París:

Aquí yace el hijo; aquí yace la madre;  
aquí yace la hija; aquí yace el padre;  
aquí yace la hermana; aquí yace el hermano;  
aquí yacen la esposa y el esposo;  
y a pesar de eso, aquí sólo hay tres personas.

En el famoso cuadro “Melancolía” de Albrecht Dürer, aparece un dibujo acerca del cual se ha escrito mucho más que sobre cualquier otro pasatiempo matemático. Dicho dibujo representa un *cuadrado mágico*.

Un cuadrado mágico consiste en una disposición de números enteros en un cuadrado que, al ser sumados en renglones, diagonales o columnas, dan el mismo resultado total.

Los cuadrados mágicos datan, por lo menos, de la época de los árabes. Grandes matemáticos como Euler y Carley descubrieron que eran entretenidos y dignos de ser estudiados. Benjamín Franklin admitió como disculpándose, que había invertido algún tiempo en su juventud en estas “bagatelas” —tiempo “que”, se apresuraba a añadir, “lo podía haber empleado en algo más útil”. Los matemáticos jamás han pretendido que los cuadrados mágicos fuesen algo más que entretenimientos, por mucho tiempo que hayan invertido en ellos, aunque el continuo estudio dedicado a esta forma de rompecabezas pueda haber arrojado alguna luz, incidentalmente, sobre las relaciones entre los números. Su móvil principal es, todavía, místico y recreativo\*.

Existen otros rompecabezas de considerable interés, que aquí no discutimos porque los tratamos más extensamente en un lugar adecuado<sup>20</sup>. Entre éstos hay problemas relacionados con la teoría de la probabilidad, el coloreado de mapas y las superficies de una sola cara, como la banda de Möbius.

Queda solamente un extenso grupo de problemas, aquellos relacionados con la teoría de los números. La teoría moderna de los números, representada por una vasta literatura, atrae la atención de todo matemático serio. Es una rama del estudio, muchos de cuyos teoremas, aunque sumamente difíciles de demostrar, pueden enunciarse de manera sencilla y son fácilmente comprensibles por todos. Dichos teoremas son, por lo tanto, más ampliamente conocidos entre legos cultos que teoremas de mucha mayor importancia en otras ramas de las matemáticas, teoremas que requieren conoci-

---

\* Recientemente se ha encontrado, en la investigación agronómica, y más generalmente, en el diseño de experimentos para análisis estadístico por el método de bloques equilibrados incompletos, una importante aplicación a los cuadrados mágicos. Véase el capítulo 14 de *New Mathematical Diversions*, de Martin Gardner, del que hay edición española, “Nuevos pasatiempos matemáticos”, Alianza Editorial, 1972.



mientos técnicos para ser comprendidos. Cada libro referente a entretenimientos matemáticos está lleno de rompecabezas simples o ingeniosos, astutos o maravillosos, fáciles o difíciles, que se basan en el comportamiento y propiedades de los números. El espacio de que disponemos nos permite mencionar sólo uno o dos de estos teoremas significativos sobre los números, los cuales, a pesar de su profundidad, pueden entenderse fácilmente.

Desde que Euclides demostró<sup>21</sup> que la cantidad de números primos es infinita, los matemáticos han estado buscando una prueba para determinar si un número dado es o no primo. Pero no se ha encontrado una prueba aplicable a todos los números. Aunque es extraordinariamente curioso, hay razones para creer que ciertos matemáticos del siglo XVII, que dedicaron muchísimo tiempo a la teoría de los números, poseían medios para reconocer los números primos que nos son totalmente desconocidos. El matemático francés Mersenne y su mucho más grande contemporáneo Fermat tenían un misterioso sistema para determinar los valores de  $p$ , para los cuales:  $2^p - 1$  es un número primo. Aún no se ha determinado claramente hasta qué punto habían desarrollado su método, o en realidad, qué método emplearon exactamente. Por consiguiente, sigue siendo todavía un motivo de asombro que Fermat contestara, sin un momento de vacilación, a una carta en la que se le preguntaba si el número 100.895.598.169 era primo, que éste era el producto de 898.423 por 112.303 y que cada uno de estos números era primo<sup>22</sup>. Careciendo de una fórmula general para todos los números primos, un matemático invertiría años para dar una respuesta correcta.

Uno de los teoremas más interesantes sobre la teoría de los números es el de Goldbach, que expresa que todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos. Es fácil de comprender y existen todas las razones para creer que es cierto, pues no se ha encontrado todavía un número

par que no sea la suma de dos números primos; sin embargo, nadie ha logrado hallar una demostración válida para todos los números pares.

Pero quizá la más famosa de todas esas proposiciones consideradas ciertas, pero jamás demostradas, sea el "Último teorema de Fermat". En el margen de su ejemplar de la *Aritmética*, de Diophanto, Fermat escribió: "Si  $n$  es un número mayor que 2, no hay números enteros,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tales que:  $a^n + b^n = c^n$ . He hallado una demostración verdaderamente maravillosa, que no cabe en este margen." ¡Qué lástima! Suponiendo que Fermat tuviese realmente una demostración (y su talento matemático era de tan alto rango que, por cierto, es posible) habría evitado a las generaciones de matemáticos que lo siguieron interminables horas de labor si hubiese tenido lugar para escribirla en el margen. Casi todo gran matemático, después de Fermat, ha intentado una demostración, pero ninguno lo ha logrado.

Se conocen muchos pares de números enteros, la suma de cuyos cuadrados es también un cuadrado, así:

$$3^2 + 4^2 = 5^2; \text{ o, } 6^2 + 8^2 = 10^2$$

pero nunca se han hallado tres números enteros para los cuales la suma de los cubos de dos de ellos sea igual al cubo del tercero. El argumento de Fermat era que esto sería cierto para todos los números enteros cuando la potencia a la cual estaban elevados era mayor que 2. Mediante cálculos extensos, se ha demostrado que el teorema de Fermat es cierto para valores de  $n$  hasta 617\*. Pero Fermat dijo para *todo va-*

\* Es muy fácil demostrar que si el teorema de Fermat es verdadero para un exponente  $n$ , lo es también para todos los múltiplos de  $n$ . Por consiguiente, la dificultad está en demostrar el teorema cuando  $n$  sea número primo o cuando  $n = 4$ . El caso  $n = 4$  fue establecido por el propio Fermat. En 1847, Kummer dio una condición suficiente para que un exponente primo cumpliera el teorema de Fermat, y supuso que existirían infinitos de tales números primos. Todos los esfuerzos por demostrar que así es han fracasado. En 1978, las condiciones suficientes conocidas permitían asegurar que el teorema de Fermat es cierto para todos los exponentes primos menores que 125.000.



lor de  $n$  mayor que 2. De todas sus grandes contribuciones a las matemáticas, el legado más famoso de Fermat es un rompecabezas que tres siglos de investigación matemática no han logrado resolver, y que muchos escépticos creen que el mismo Fermat jamás resolvió.

Con un poco de mala gana debemos despedirnos de los rompecabezas. De mala gana, porque hemos alcanzado a ver sólo un resplandor fugaz de un tema rico y entretenido y porque los rompecabezas, en un sentido, mejor que ninguna otra rama simple de las matemáticas, reflejan su espíritu siempre juvenil, vigoroso, puro e investigador. Los rompecabezas están hechos de las cosas con que juega el matemático, no menos que el niño con sus juguetes, y sueña y se maravilla con ellos porque están hechos de las cosas y circunstancias del mundo en que vive.

NOTAS DE ESTE CAPÍTULO

1. Anatole France, *Le crime de Sylvestre Bonnard*. Página 161.  
2. W. W. R. Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, 11.ª edición. New York, Macmillan, 1939.  
W. Lietzmann, *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen*, Breslau, Hirt, 1930.  
Helen Abbot Merrill, *Mathematical Excursions*, Boston: Bruce Humphries, 1934.  
W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig. B. G. Teubner, 1921, vols. I y II.  
H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, London: Thomas Nelson, 1919.  
E. Lucas, *Récréations Mathématiques*, Paris. Gautier-Villars, 1883-1894, vols. I, II, III y IV. Página 162.  
3. Damos a continuación un ejemplo de un tipo de rompecabezas, muy de moda últimamente que, aunque aparentemente verboso, no contiene datos que no sean indispensables:

LOS ARTESANOS

Hay tres hombres, John, Jack y Joe, cada uno de los cuales tiene dos profesiones. Sus ocupaciones son las siguientes: chófer, contrabandista de licores, músico, pintor, jardinero y barbero.  
En base a los siguientes hechos determínese el par de profesiones que corresponde a cada hombre:

1. El chófer ofendió al músico riéndose de su cabello largo.
2. El músico y el jardinero solían ir a pescar con John.
3. El pintor compró al contrabandista un litro de ginebra.
4. El chófer cortejaba a la hermana del pintor.

5. Jack debía \$5 al jardinero.  
6. Joer venció a Jack y al pintor jugando al tejo. Página 164.  
4. Hay dos maneras de resolverlo cada una de las cuales se simboliza en la siguiente tabla (pág. 164)

PRIMERA SOLUCIÓN			SEGUNDA SOLUCIÓN		
	L = lobo			R = repollo	
	C = cabra			→ = cruce del río	
1. LCR			1. LCR		
2. LR	C →	C	2. LR	C →	C
3. LR	←	C	3. LR	←	C
4. R	L →	LC	4. L	R →	CR
5. CR	← C	L	5. LC	← C	R
6. C	→ R	LR	6. C	L →	LR
7. C	←	LR	7. C	←	LR
8.	C →	LCR	8.	C →	LCR

5. Al menos, así lo dice su biógrafo Arago. No sólo la calidad de la obra de Poisson fue extraordinariamente elevada, sino que su producción fue enorme. Además de ocupar varios puestos oficiales de importancia, escribió más de 300 obras en una vida relativamente breve (1781-1840). "La vie, c'est le travail" era el lema de la casa de Poisson y, aunque parezca muy extraño, la solución de un rompecabezas lo condujo a una vida de incesante labor. página 166.  
6. Llene la jarra de 5 litros con parte del contenido de la de 8 litros y vierta tres cuartos de la jarra de cinco litros en la de 3 litros. Eche luego los 3 litros en la jarra de 8 litros. Vierta los 2 litros restantes de la jarra de 5 litros en la de 3 litros. Ya que hay 2 litros en la jarra de 3 litros, podremos llenar a ésta con 1 litro adicional. Vierta suficiente vino de la jarra de 5 litros a fin de llenar la de 3 litros. La jarra de 5 litros tendrá entonces 4 litros que quedarán en ella. Vierta ahora los 3 litros de la jarra de 3 litros en la de 8 litros. Esto, sumado al litro que quedó en la misma, dará los 4 litros. página 166.  
7. W. W. R. Ball, *op. cit.* página 169.  
8. Se han sugerido otras bases. Hay razones para creer que los babilonios emplearon la base 60 y en épocas más recientes se ha argumentado mucho en favor de la base 12. Página 169.  
9. Hall y Knight, *Higher Algebra* página 171.  
10. Arnold Dresden, *An Invitation to Mathematics*, New York, Henry Holt & Co. 1936. Página 173.  
11. W. Ahrens, *op. cit.* página 177.



12. W. W. R. Ball, *op. cit.* Página 177.
13. (Teniendo en cuenta los años bisiestos. Ed.) Página 178.
14. Véase Ahrens, *op. cit.* y Bouton, *Annals of Mathematics*, serie 2, vol. III (1901-1902), págs. 35-39, para la demostración matemática de Nim. Página 178.
15. La vigésima parte de un codo es aproximadamente una pulgada. Página 180.
16. La regla general para resolver dichos problemas puede verse en P. G. Tait, *Collected Scientific Papers*, 1900. Página 183.
17. Smith & Mikami, *A History of Japanese Mathematics*. Páginas 98, 183.
18. Johnson & Story, *American Journal of Mathematics*, vol. 2 (1879). Página 184.
19. Ahrens, *op. cit.*, vol. 2. Página 190.
20. Hay también rompecabezas, que aunque muy entretenidos y engañosos, no representan idea matemática alguna que no haya sido ya considerada, y, por lo tanto, hemos prescindido de mencionarlos. Podemos, no obstante, dar tres ejemplos, elegidos por cuanto a menudo se les resuelve incorrectamente:

- (a) Un vaso contiene vino hasta la mitad y otro vaso la misma cantidad de agua. Del primer vaso se saca una cucharadita de vino y se vierte en el vaso que contiene agua. De la *mezcla* se toma una cucharadita y se echa en el vaso de vino. ¿Es ahora mayor o menor la cantidad de vino en el vaso de agua que la cantidad de agua en el vaso de vino? Para dar término a todas las discusiones: es la misma.
- (b) El siguiente rompecabezas agitó no hace mucho tiempo, a los delegados a una distinguida asamblea de expertos en problemas difíciles. Un mono está colgado del extremo de una cuerda que pasa por una polea y está en equilibrio merced a una pesa atada en el otro extremo. El mono decide trepar por la cuerda. ¿Qué sucede? Los astutos congresales se empeñaron en toda clase de vanas conjeturas y especulaciones que iban desde la duda de si el mono podía trepar por la cuerda, hasta "rigurosas demostraciones matemáticas" de que no podía. (Cedemos avergonzados, al impulso probablemente superfluo, de señalar la solución: ¡la pesa sube igual que el mono!)
- (c) Imaginemos tener una cuerda de 40.000 kilómetros de largo, longitud suficiente para poder rodear exactamente al globo terrestre por el ecuador. Tomemos la cuerda y adaptémosla ajustadamente a su alrededor, sobre océanos, desiertos y junglas. Desgraciadamente, cuando hemos completado nuestra tarea descubrimos que al confeccionar la cuerda se ha cometido un ligero error, pues sobra 1 metro. Para salvar el error decidimos unir los extremos de la cuerda y distribuir uniformemente ese metro en los 40.000 kilómetros. Naturalmente (nos imaginamos) nadie lo notará. ¿A qué distancia le parece a usted que la cuerda quedará separada del suelo por el simple hecho de sobrarle 1 metro?

La respuesta correcta parece increíble, pues la cuerda quedará a 16 cm de la Tierra a todo lo largo de sus 40.000 km.

Para que esto le resulte más razonable usted puede preguntarse: Caminando alrededor de la superficie terrestre, ¿cuánto más recorre su cabeza que sus pies? Página 193.

21. La prueba dada por Euclides de que hay un número infinito de números primos, es una demostración elegante y concisa. Si  $P$  es un número primo cualquiera, siempre puede hallarse otro mayor que él, considerando  $P! + 1$ . Este nuevo número, evidentemente mayor que  $P$ , no es divisible entre  $P$  o cualquier número menor que  $P$ . Hay sólo dos alternativas: (1) No es divisible en modo alguno. (2) Es divisible por un número primo situado entre  $P$  y  $P! + 1$ . Pero cualquiera de estas dos alternativas prueba la existencia de un número primo mayor que  $P$ . C.D.D. Página 194.

22. Ball, *op. cit.* Página 194.

1. Stephen Hawking, *Una vida para la ciencia*. Michael White y John Gribbin
2. La verdadera historia de los dinosaurios. Alan Charig
3. La explosión demográfica. *El principal problema ecológico*. Paul R. Ehrlich y Anne H. Ehrlich
4. El monstruo subatómico. *Una exploración de los misterios del Universo*. Isaac Asimov
5. El gen egoísta. *Las bases biológicas de nuestra conducta*. Richard Dawkins
6. La evolución de la física. Albert Einstein y Leopold Infeld
7. El secreto del Universo. *Y otros ensayos científicos*. Isaac Asimov
8. Qué es la vida. Joël de Rosnay
9. Los tres primeros minutos del Universo. Steven Weinberg
10. Dormir y soñar. *La mitad nocturna de nuestras vidas*. Dieter E. Zimmer
11. El hombre mecánico. *El futuro de la robótica y la inteligencia humana*. Hans Moravec
12. La superconductividad. *Historia y leyendas*. Sven Ortoli y Jean Klein
13. Introducción a la ecología. *De la biosfera a la antroposfera*. Josep Peñuelas
14. Miscelánea matemática. Martin Gardner
15. El Universo desbocado. *Del Big Bang a la catástrofe final*. Paul Davies
16. Biotecnología. *Una nueva revolución industrial*. Steve Prentis
17. El telar mágico. *El cerebro humano y la computadora*. Robert Jastrow
18. A través de la ventana. *Treinta años estudiando a los chimpancés*. Jane Goodall
19. Einstein. Banesh Hoffmann
20. La doble hélice. *Un relato autobiográfico sobre el descubrimiento del ADN*. James Watson
21. Cien mil millones de soles. *Estructura y evolución de las estrellas*. Rudolf Kippenhahn
22. El planeta viviente. *La adaptación de las especies a su medio*. David Attenborough
23. Evolución humana. Roger Lewin
24. El divorcio entre las gaviotas. *Lo que nos enseña el comportamiento de los animales*. William Jordan
25. Lorenz. Alec Nisbett
26. Mensajeros del paraíso. *Las endorfinas, drogas naturales del cerebro*. Charles F. Levinthal
27. El Sol brilla luminoso. Isaac Asimov
28. Ecología humana. *La posición del hombre en la naturaleza*. Bernard Campbell



29. **Sol, lunas y planetas.** Erhard Keppler
30. **Los secretos de una casa.** *El mundo oculto del hogar.*  
David Bodanis
31. **La cuarta dimensión.** *Hacia una geometría más real.*  
Rudy Rucker
32. **El segundo planeta.** *El problema del aumento de la población mundial.* U. Colombo y G. Turani
33. **La mente (I).** Anthony Smith
34. **La mente (II).** Anthony Smith
35. **Introducción a la química.** Hazel Rossotti
36. **El envejecimiento.** David P. Barash
37. **Edison.** Fritz Vögtle
38. **La inestable Tierra.** *Pasado, presente y futuro de las catástrofes naturales.* Basil Booth y Frank Fitch
39. **Gorilas en la niebla.** *13 años viviendo entre los gorilas.*  
Dian Fossey
40. **El espejo turbulento.** *Los enigmas del caos y el orden.*  
John Briggs y F. David Peat
41. **El momento de la creación.** *Del Big Bang hasta el Universo actual.* James S. Trefil
42. **Dios y la nueva física.** Paul Davies
43. **Evolución.** *Teorías sobre la evolución de las especies.*  
Wolfgang Schwoerbel
44. **La enfermedad, hoy.** Lluís Dauí
45. **Iniciación a la meteorología.** Mariano Medina
46. **Los niños de Urania.** *En busca de las civilizaciones extraterrestres.* Evry Schatzman
47. **Amor y odio.** *Historia natural del comportamiento humano.*  
Irenäus Eibl-Eibesfeldt
48. **Matemáticas e imaginación (I).** Edward Kasner y James Newman
49. **Matemáticas e imaginación (II).** Edward Kasner y James Newman

EXLIBRIS Scan Digit



The Doctor

*Libros, Revistas, Intereses:*  
<http://thedoctorwho1967.blogspot.com.ar/>







No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman -ambos matemáticos de gran renombre- se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará -o aumentará- nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

# Matemáticas e Imaginación (I)

Edward Kasner  
James Newman

Matemáticas  
e Imaginación (I)

E. Kasner  
J. Newman

48



Biblioteca  
Científica  
Salvat



No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas  
e Imaginación (I)

E. Kasner  
J. Newman

48



# Matemáticas e Imaginación (I)

Edward Kasner  
James Newman

Biblioteca  
Científica  
Salvat



No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

Matemáticas  
e Imaginación (I)

E. Kasner  
J. Newman

48




# Matemáticas e Imaginación (I)

Edward Kasner  
James Newman

Biblioteca  
Científica  
Salvat





No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

## Matemáticas e Imaginación (I)




# Matemáticas e Imaginación (I)

Edward Kasner  
James Newman



Biblioteca  
Científica  
Salvat






No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

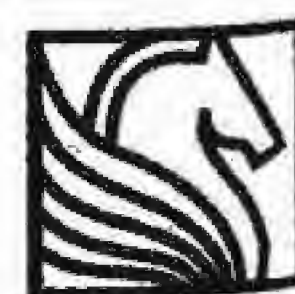
Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.

## Matemáticas e Imaginación (I)



# Matemáticas e Imaginación (I)

Edward Kasner  
James Newman



Biblioteca  
Científica  
Salvat